

A 17 stage combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of the scheme suggested by Philip W. Sharp in:
See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{1}{96}, c_3 = \frac{432202}{6946863}, c_4 = \frac{216101}{2315621}, c_5 = \frac{49}{250}, c_6 = \frac{93}{427}, c_7 = \frac{14}{339}, c_8 = \frac{22310340308}{35808880735},$$

$$c_9 = \frac{92}{123}, c_{10} = \frac{190}{407}, c_{11} = \frac{103}{725}, c_{12} = \frac{71}{78}, c_{13} = \frac{7473333428322953}{12954922934192701}, c_{14} = \frac{85}{87}, c_{15} = \frac{96}{97}, c_{16} = 1, c_{17} = 1.$$

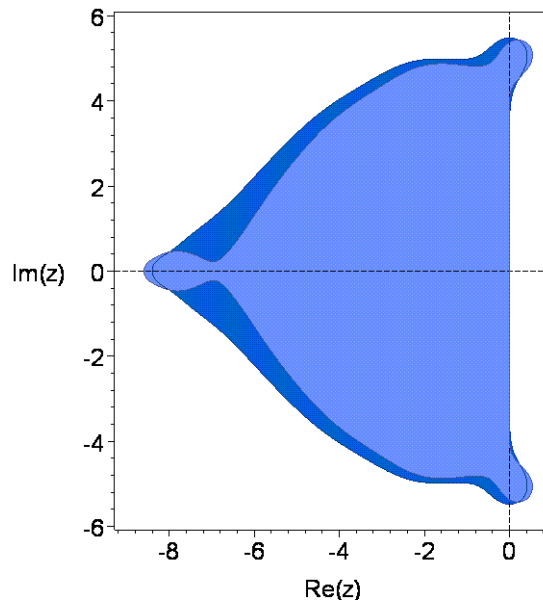
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.5632504758 \times 10^{(-7)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.5292590319 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: $\frac{749}{20} = 37.45$.

The 2-norm of the linking coefficients is: 53.99507800.

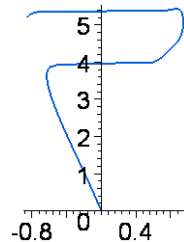
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-8.6010, 0]$ and $[-8.4063, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[3.9428, 5.3729]$ as well as at the origin.

The coefficients are as follows.

$c[2]=1/96,$
 $c[3]=432202/6946863,$
 $c[4]=216101/2315621,$
 $c[5]=49/250,$
 $c[6]=93/427,$
 $c[7]=14/339,$
 $c[8]=22310340308/35808880735,$
 $c[9]=92/123,$
 $c[10]=190/407,$
 $c[11]=103/725,$
 $c[12]=71/78,$
 $c[13]=7473333428322953/12954922934192701,$
 $c[14]=85/87,$
 $c[15]=96/97,$
 $c[16]=1,$
 $c[17]=1,$

$a[2,1]=1/96,$
 $a[3,1]=-1987961073422/16086301846923,$
 $a[3,2]=2988777100864/16086301846923,$
 $a[4,1]=216101/9262484,$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=648303/9262484,$
 $a[5,1]=20744538527574673/182420477347656250,$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-270436364963253951/729681909390625000,$
 $a[5,4]=330475865093517759/729681909390625000,$
 $a[6,1]=3850751397/124559514982,$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=14832069842931/117953764862962,$
 $a[6,5]=10822511718750/177015250482553,$
 $a[7,1]=7086837637692422/265422978222019713,$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=187317660247276166887750625/8149588180459228193219318547,$
 $a[7,5]=-14928930885406250000/608911294869722684151,$
 $a[7,6]=6644170115684096933/411907182288043719069,$
 $a[8,1]=-801669293553146286763657852588598147363171545855547934683071/$
 $50464720624761943773233953240759112752002760830105099661500,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=-2356920097259913403307708266327825364986899194256860622332308010349271/$
 $94865913565202676122315662786560049811511523708731091349026971769500,$
 $a[8,5]=-3692884619514573829747289755345072678642765279062789617862500/$
 $694631759165002027816829139857685475975988284587192408829863,$
 $a[8,6]=14735891771761248111364972373944121690947984917913715371908491/$
 $1598279172172100830707702573431343176932157899858428303775500,$
 $a[8,7]=749/20,$
 $a[9,1]=207096916765722514/881324706544255449,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=38092801464592147220133760/82191165240512227616236377,$
 $a[9,7]=-33202651803657867256888/130567525236007688080749,$
 $a[9,8]=5353223638529637949576218210141545750/17620139325182024474477820826361166159,$

a[10,1]=526889713719229641397064605/3197718841498370761453783704,
a[10,2]=0,
a[10,3]=0,
a[10,4]=0,
a[10,5]=0,
a[10,6]=1094923520649631238980995101432408840/2747002579719053431528541446510597173,
a[10,7]=-484233433380665502388405878746775/3298488915068298531400744659481702,
a[10,8]=8247383993997601734236792101724709555622403160776835671875/
109739752699495143321542876999115127047579221706619877169744,
a[10,9]=-1563657244076717660688475037505/62853310529132425629528762688336,
a[11,1]=549683710287818025529713473482140317668033/12262664415696094485342644694062208750000000,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=580655329075946870028907540041823460254688690568599/
6583906460715054192397699423497122450419400097656250,
a[11,7]=501043238460442665943750676465902738656457790649/
12649099138879577458698703213034068398862187500000,
a[11,8]=156021996290995726170842445797040794885687884273359843580326825884924807/
3366654361106560480035263079940214426922804039587796694914879025620000000,
a[11,9]=-15967394898291418127315577706197594242394717189/1205154506443623424279596789343386873612500000000,
a[11,10]=-31/487,
a[12,1]=-1771669573580872957765857769001519903782197967001/460148945652100020980755138400415501959520000000,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=2938626757890364469352039683942157104211473502401261531/
2205866459963810218055010967184472261118361549524218750,
a[12,7]=377481403425944925519070773039647220276652412960112283/
52738852348834454116354186244744377194286463640000000,
a[12,8]=-27093122636738184632069967149946860513141618791739325137516916377384580302017/
18047376539791966596375515140216265095841595107407141708514808003048199680000,
a[12,9]=204882885167263746014056211573780231198651856430297/
239273450660600623003648430608882753231585600000000,
a[12,10]=562/325,
a[12,11]=-284/59,
a[13,1]=4315769877886963859019603361478384648854404101733255802628193312471971778426302101966577916652932143505
70322510665422358870490033993128025302573221293410777/437845266673423065425526088160013089788623360061659598531
975329947929572683739208986940851928591062467517512347937356070599136420078925474770705035590000000,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,
a[13,6]=2894512721153526615679753118571443834906481789386959996083816782406151258885308861607083871608344583060
26048729583680753437362442408233429706624152232824864013/341150027855589745271738193617027284302055331926869813
578037593584367451592987147477727179165172086582099849431323923185935233774540073626177623480073474218750,
a[13,7]=-6692205397317046808992150180851505319615922343876551397192454009410003050080342701022326899146664850866
53542220198978202490216684302705873511882948494595598529519/451643133816192617104647669488340660329807282832490
76084124142931719949124946293908141448709635455572604818521759970346746072715278045844256001955458433785750000
0,
a[13,8]=1465186703529835937999856966863204541113382364911929321209366734857349110361665009115292096361038418451
13386039046498467173370133153297690593831867110125288370278646059654132200529/249163680414927511714022205812266
25244842189581827630020708109503898872377246179628850060394213499130062110234202557855428409724746386290087462
1648285846049951483952063918443360000,

a[13,9]=-1537650402515315254985291154806569471169762492552988385412167604194329036349323901259642394058887829375
577315062659426141363416682935585352777613364243840241/88401195233020031677105609182522937418302139238129177629
3154426273722434622509783276886238111503546082010346072935333838343786197880306669163837496530000000,
a[13,10]=-205304064218855798061676464404775890665245104195451512241537944772656429843118215725228311578299890484
0066516152550922692673/3973854954299793257483977733909674200311104835509079233477765854102703927631397181068177
736710594286828733069524580995762300,
a[13,11]=222616688196256368213983914803811163038416678336618667565000559872061722362515246351652728893780960864
316884856492093/68414398141267323639453030841285320512770774044449614891305879947575292617359995285413499740131
3103087246528548427303,
a[13,12]=127375330512888312010072474630223468126946468357550246961343481025437273403461376029730048323546258155
024/78731193945690846424234173580052925640718742445851832448784640456889211292871910970629307000659736969289581
,
a[14,1]=-198530277209756149408044661891797453041196168975899401478714783378902401066065515325747881047776297873/
80392974587622936081932023902169203532396281425163956635896431200039407464610029892636134524434000000,
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=-13976665495810168257845738456602218224449839669107780657819994119165424739839357421078316191499/
4361221976217605975503346483406873788415910933643251377279551437946181328930792840733460468750,
a[14,7]=528056870197054138554751754984802012924592081939131904879596475645151773588707927342066284233/
136854461920490719343629734907735034787065289710712227644459440281846992920940519447243500000,
a[14,8]=-112577820938684977320972532502856373922882046097631889744179327870930534784125602738469207489979677528
2854568518063/5203551494095040323244441419217453576434802225146579009525402779607856679882026600055780999346762
653601472695008000,
a[14,9]=6410475029020694552394969239118304096984587447002341928116490756257657020943644603297742814911865758384
78963/383972526678525022536564510424239524740387819799510012972872353305238396118968567928570297748691329460000
000,
a[14,10]=229531925051632776919947252376039698915350438808723966285651208829122/
51044068818850657588146644586158391630329666851009012448172712026405,
a[14,11]=972106679473080634923144888216099123183655069928214862403613622220/
1544466889480120338790074466878476778307396110545514289703246378337,
a[14,12]=-13465380647512775004833669814911514545951737683715520/
362019549093720011833670312646637601924546552516533143,
a[14,13]=-388626360578209853553525261211687335160929913705350081879378919802202482331800014470906558564814438986
93640/215633723593505477789132890224860407049483051794294852494930926355349906476341023275953798268472158122535
63,
a[15,1]=-5351439058852458934157794898906345307228925049577780939253166801035946677662498469398489724031593586883
843191588/34165247459660136595202062756709677296034291047733447538074158102304514158183893532666773510374031255
80672109375,
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-1517108248494728943705852746978036361610812569730580192009559895141860462479897664537282729416192/
300741969619271476336106189008371518497441657898687568114522438136762862583934724367387207421875,
a[15,7]=22915748452471319521672914678695012427883440658931693384202139646725960574413876673563970096/
12037290638273675919170933309092094511156607532533865925524454834493726736559090037771796875,
a[15,8]=-8954045196754152160145648717175344023059421949750581696544459149859181124338516846718283962378604346322
10511829174/400477106890246816385095731829066621505292721463201560406740823000965750251019186297704796761469900
833787387100625,
a[15,9]=1033606362550214510455193822516647689406539609493407023868590433725515635847219252361894265561827769740
674030610890654005178/55747960197538655807332080164946497830706445814990111883198877061908760291154347982658546
0754800912524744203540091011328125,
a[15,10]=8527041128773204667109441924652080077851077000836214256485998692220520750997336559238592/
1594092749680616299216672543185574383783568169415965711540794625365121569482788797020075,
a[15,11]=448646953522452091356976369375003926907107164210046251054141038391882674218458152/
140525563800204330616314770295101629381083739165432827386711997575463690318139173,

a[15,12]=-12022952562797826427995471601834540296250756109495489480749677520896/
398262490637680045718416156230661055764753466864751412165460688082147,
a[15,13]=-647123050735005294036451589256052351500895682027350692137114373781587511087787387005182780103207772009
12195369951803323448465013080720027232/266988060444356765166713980669228918605586673778655799079807971834028650
8702500771569829515118503232329554510548048177267721556588811298863,
a[15,14]=-1508565028535604218960891196143914624852927632153672/
164316299969757096685065071333483646324154676761659005,
a[16,1]=-4666338523504255174966157549967171358563999660239202257576035609888435267152625441957261080933344611194
47791679974580456983393199141929817425762926991692802580145432074133529726264888791240398555903451110000000,
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=-108687385913616090836826380673588391918379393157773246668954300965946433745972494282352374563010533/
15822831107134261254310247738216017806208397279954460623625145578502347776910893937177092932031250,
a[16,7]=-115625665357517434681829647760247220847721529264440669421888307707136815891946047707665343159243/
638380233839651485243278791282161763028454731814570001960518372234267121251193220755944827500000,
a[16,8]=-1647199822667472695004463982357299314819191232158275552623897013259134897016631741342628814532212066819
56202228771055481/728184753273219817307155955680196430138062151579611244583149346604717387223251051174088772923
42551380310925397222560000,
a[16,9]=2151938790667667499637014605774534692666006828189999742369359749873507663076193135942073637096199306611
1472523181403/1071536185269000392847502561331654506611184824209052436517785416552465133270421110831192348003490
1204585016100000000,
a[16,10]=10097265463259630934006710790674993802711256153748620296096599355210474683916260251/
1647069769238222231271398490029865125678142337815430622653634540945646707640942900,
a[16,11]=75638602894938774543068577536550099733688246664591467405820070369412184513037/
12997969162650466918702521473764773738197689164936797548257656531641056446922,
a[16,12]=-158772108582046770568878751299409088096499015396855532087344/
5408866238559506134110639753181268248025566673410390635754031,
a[16,13]=-202962908124963682063270084419814148071101439883859997795341306713623963642768650329078339362690324542
6572569173381795305268075575095956290397298/6730806615549935303878377996824193804612208205194835728267009124694
63695067123078955810311070414156254561319749585724570487212937351795394265653,
a[16,14]=858895880376889807117196615572530233424687901236918642591/
68426576478818624228060408917292139103384756973664275063110,
a[16,15]=-867586172489206340492917160074786071529919633396176300221/
35978836044903207647645247951873971158812715709113174141904,
a[17,1]=-175564845182074349635154294347276358234139198511944523785931383443485010869498939372738445330855702107/
93786736875793573978175687397344319482380323325717142224932277038248061300755317232098804259390000000,
a[17,2]=0,
a[17,3]=0,
a[17,4]=0,
a[17,5]=0,
a[17,6]=-37993992721232955533056002108719246098910149461693030292395123434215216987523944556958762091819/
5623377167502583437356010908336709125162049000084438127694499703041960063550526608184055468750,
a[17,7]=48204035280652729566842522223658834561521724801961190398456341417719647702119853027258920651/
226878035090714521904757745048710536448125065154162449224193654995825082328050162330892500000,
a[17,8]=-7365139352985912824431372555619539878089662563803455686327953089346041165055182860912605333236553486789
0046107382983/2587942377412990729826321017380939904143239469283987252568526216815253711961350691640543161480750
8407755670356320000,
a[17,9]=8535497058839964987057321078332852408117951812489525063234153722014583593008992356839688743115522002539
247760229/38082009961400932983211341249816931640585827631152274871095138110168489055423540669493431018791962095
16700000000,
a[17,10]=2758647975225086760220455659446438961793787083326855918916323481569312834809/
403682281551813467100830293042423657236472603900290588389827181993289993900,
a[17,11]=1223045556471533629816419998180473618915120284120811454093117029172881/
275792937220904934416313090354206469441984684195722991157081626276219,

a[17,12]=1299368344840223295567380615753437463555834146102148208/
387017105503359615315000666638995079539398744668405037697,
a[17,13]=-158651996632116023348668280110707984136014503873508105594964404293439163401713461633705298973724414734
251778164155771404572721215087242256895490307336689526641570402670192045789623219932912842591675537629250018697
82818012724191478193755923026262293466663,
a[17,14]=-615589389082713203731711509770067982831366510822991082/
13750213123255653704694809563106956261286795857997882255,
a[17,15]=0,
a[17,16]=0,

b[1]=5816726472037774998389772713/145515176972852390517445990400,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=0,
b[7]=0,
b[8]=0,
b[9]=1244382078924808281095364363980548725039/1645985193209599515897052171080562228480,
b[10]=206103271612021143802125987754577056293116743/369515332055560673031081396182556111048427200,
b[11]=247620265662219594580246769853015183685302734375/107021206018445144056944418907261663053784089856,
b[12]=-2274456721261225780276949396460779712/1148181145407641028474730691069001985,
b[13]=-46133654405045535457973917821471885915537706699718352395678865524310462933089740731141703716376044713463
910624753478760671713137005313157/11099193539838114577241267345636379513610366583223772111330381400120972203206
7637647722176767638714414509022153311457525244197988621011840,
b[14]=35326654165308305143881061496952798897/1859254969720466863628860451102444800,
b[15]=-6369652715961897116670627971897543597961/212139227132068814573590679041412618240,
b[16]=164878441966029234034782061/12844178995716972043342720,
b[17]=0,

b*[1]=7474114294920260327769112903915484480758708463365507/
187439966106991534555937730995200994792632668767954800,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=0,
b*[7]=0,
b*[8]=0,
b*[9]=3419923747977503586596867668252950963131321354170886786303900979/
4846204895634863747220051029420385597674328926474534565451558880,
b*[10]=1583057265930163425316750847038515362736216333192050080720847860899619/
2881593146102469435000798017756114346918825612289133047150120147102800,
b*[11]=5113069656734592292175802100521589617832593440153082525209035589599609375/
22056862132058388557859090958100906406402968691939533516034626849775109152,
b*[12]=-15489109295703142411063875452600046528113516503786808034458518608/
9276205599129553019999747176705875045363846844898819940318163165,
b*[13]=-5801083037499520596877999949577867846564966428059292739233327711484968781445436468544517496416472184976
8040412205189714802561981149275538584550727440689558317687/1475820756393488030297201110179681423817206000225790
27481277068162616531563078130000187852944401026454452160411694821385318640957912797464157991600293741126617760,
b*[14]=599821390843944230251816025115466501767931310930169400709742543/
38318882828138429567713828993683597897895463905251994035341600,
b*[15]=-1767273033360513315584072255072339227706446293228011123550177/
71957672089806415295290495903747942317625431418226348283808,
b*[16]=21/2,
b*[17]=-212811103388272914009350955770034649756187321605007/
3706024387006571743373811081043185857490811979155360.