

A 17 stage combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of the scheme suggested by Philip W. Sharp in:
See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{18}{419}, c_3 = \frac{1873449}{30030925}, c_4 = \frac{5620347}{60061850}, c_5 = \frac{165}{851}, c_6 = \frac{101}{475}, c_7 = \frac{24}{619}, c_8 = \frac{776000409349}{1250431777611},$$

$$c_9 = \frac{649}{870}, c_{10} = \frac{47}{99}, c_{11} = \frac{297}{2029}, c_{12} = \frac{5}{6}, c_{13} = \frac{308102526470259}{420385567882757}, c_{14} = \frac{83}{85}, c_{15} = \frac{88}{89}, c_{16} = 1, c_{17} = 1.$$

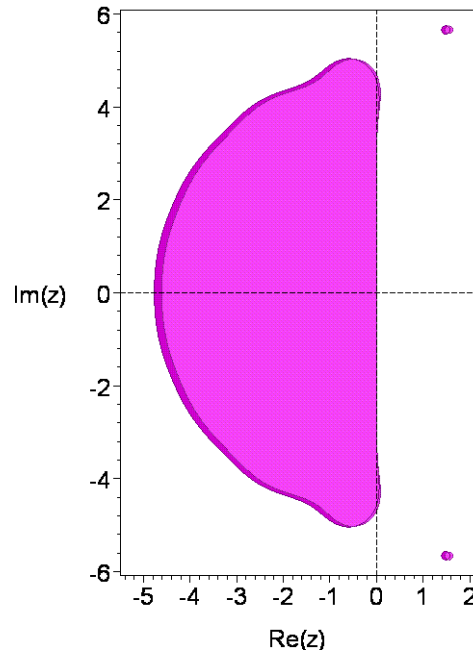
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.3258583005 \times 10^{(-7)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.4009972320 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 45.33649660.

The 2-norm of the linking coefficients is: 83.36628469.

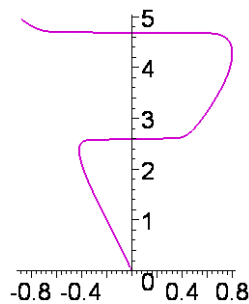
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-4.6110, 0]$ and $[-4.7701, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[2.5867, 4.6889]$ as well as at the origin.

The coefficients are as follows.

$c[2]=18/419,$
 $c[3]=1873449/30030925,$
 $c[4]=5620347/60061850,$
 $c[5]=165/851,$
 $c[6]=101/475,$
 $c[7]=24/619,$
 $c[8]=776000409349/1250431777611,$
 $c[9]=649/870,$
 $c[10]=47/99,$
 $c[11]=297/2029,$
 $c[12]=5/6,$
 $c[13]=308102526470259/420385567882757,$
 $c[14]=83/85,$
 $c[15]=88/89,$
 $c[16]=1,$
 $c[17]=1,$

$a[2,1]=18/419,$
 $a[3,1]=61644417397209/3607425825422500,$
 $a[3,2]=163401208244091/3607425825422500,$
 $a[4,1]=5620347/240247400,$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=16861041/240247400,$
 $a[5,1]=155622774126685468735/1442052830094324820434,$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-165688475743850269375/480684276698108273478,$
 $a[5,4]=310520807730789658750/721026415047162410217,$
 $a[6,1]=386321000501/12429800831250,$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=51047757515854534/406578583220792175,$
 $a[6,5]=64131910141375451/1145276347689168750,$
 $a[7,1]=39266871634802781976/1527877496381422913595,$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=71148482961775515561471137120000/3361395323885702114153873500791921,$
 $a[7,5]=-343151278194681773190868/13068985850082412095600535,$
 $a[7,6]=1823719793809285957500/100411266793499299383013,$
 $a[8,1]=-567157372198001214601285438125291138619769690502478981590012808298643/$
 $2172403001446913597612467967047260825026134853614137710131287952093800,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=1353420696341031029277672805052984787914510035031724092463317226195753241377607750/$
 $119484469598404814616634927514013411204673745542547323896353375845997377592154171,$
 $a[8,5]=-842445285665509670316214243544677539557819148488865453902289320851082927411/$
 $18582055271988019355435986689715876801845226280352040341956311962908171400,$
 $a[8,6]=118230768395033459444052902189848406160388429192955944137245030112243625/$
 $3172647281792417983274543227525307114729612791050793381992593959806456,$
 $a[8,7]=-1/40,$
 $a[9,1]=12132507054403544241917/45805630834372436928000,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=74729658891850301521193619025/158171388279003501322454332416,$
 $a[9,7]=-2587537067186728176514274230973/8731668165220371712850218944000,$
 $a[9,8]=9231801113938046380999149339596213001996723/30269488828241576136878810331919216230016000,$

a[10,1]=343300984999588871044905683/1719932736687528921337894752,
a[10,2]=0,
a[10,3]=0,
a[10,4]=0,
a[10,5]=0,
a[10,6]=32406126502701143733605374724453125/77694911836269372248080570507833408,
a[10,7]=-58870499876448782447080462865449817/296452777357377561613841967709272096,
a[10,8]=1377124963476368442795441011827994759668917195276928691317/
16377831627758839652208894042805276443882622102374963628992,
a[10,9]=-43386203375113394062827833000/1580545860925427099491671298503,
a[11,1]=12303022533522702167608860369141404938783/1493573199375156273104943538368814157012880,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=3291481106279421549179190006421994569209141859375/
53975616869742653490257167805203225361820840710016,
a[11,7]=24085096656901765631055082920471707672519878506527/
257436766971516069420733146276654477645951911928240,
a[11,8]=70318720155883288730418488485047544380897106491739130202221016735514815181/
2673802349317205829671556156304929187249972514861012013618259016668926074240,
a[11,9]=-21496096046977204592543876067307961667169938700/3019019109898751594714244552828476314325316846147,
a[11,10]=-37/1040,
a[12,1]=-139201922679481059583589380858575990805998461/88140399367916565680892305283287196651919872,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=3440716681587725345165845694640999331224378054921875/
3981586263246980006502597742602453004610374012197888,
a[12,7]=43478167045161330674784043331811268873982172503557751/
15192144223227502471104966572506428379783110719417856,
a[12,8]=-16989671893940417368695325071772678085943674298817583906336517742917670951763/
39447347977033497381823672057808906980194961680066770833146580930790685400064,
a[12,9]=729809647658582214901741743800743382117585540750/2141366665166461067805618582055122393172550057799,
a[12,10]=263/353,
a[12,11]=-313/159,
a[13,1]=6043867888179873579965168034390584848787149469159054120260719637390603657081955016783019249878229532221
914402939769218742899124406563555930186820821/13766670455116942020309452050388289142673143702027874731153441038
250353818080969870000511088605323063827418472514847952377539169196630334358508507520,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,
a[13,6]=2569835571267009225073488684797234808874645828659836021250993144207077933990523960798205156645192108877
670216706853658020849360473653380536172777519921875/52926376908934389916291208041537372288647445579157683378521
03845166958649110088771369570981530673976153119689862372891331859211219924508613738017858541056,
a[13,7]=-5896777400215880519272136687024695077481924531328767703533785747278914744045007807895326643588096700865
550948284138352602241314572983291309890963831241877/10097296630686517699542757056242505816858274105547392589093
324788032558182411749206041416805892233111855963252503604111544262410455103998480828859255985536,
a[13,8]=1979115101925437003677615537593096194853596895247608757316925070990688692339756288066559283693004429283
5977347257580771374896579296973311366174664282889953697698048406520039760821/5243651823802913542933280735742365
28548695434043607223187355845106346172939282803975841948397880107582624796330294961185248216377438311975009485
34985485409688716934332501843219968,
a[13,9]=-1152209623678001619518171364012121332252349587603129184672921339174806001717169702577834598122506717809
54730718955791723763434573399496357238831899564625/341007469208585047300473133805704652631177678040327858100614
9370778360627247082129781303892184518076896646888934756336372339730989696836273380740716407149,

a[13,10]=-729210925441774124761463400678296912086513388061500905495681893615676279977500709785977098182220823416
594650651/84546453644544154552597249671255728663353220839999255213817884168048951139277538006023017843101656357
36902637120,
a[13,11]=126553366437119619364960242450730425451827985591128996423853838145240244876235035317499775477035828291
059/939356926515000848276814096720428277593488273263110457690843780703164153734941088786668257210856610157980,
a[13,12]=49260941310148554951783389207355199556997249543986597755063433524877062636913329783663872/
230791010707793702188536223806665134100116148757103008562113799671790892057915981215252337935,
a[14,1]=-929583689697482879565288181208033590049204745786917504562301338540458458046474460729432373643878382917/
255814803573302348788606633411953499647432475634018596523760198419608439740481566088414759431770000000,
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=-496288168728026943295841349921144220605468066942772274560032027103316689131480167059642597/
454820888625276001707454483324022304056936466658342246555540259269488944123564607415752192,
a[14,7]=7795135292666914927694180543835595303101018534031907986412083739902696115169054566719487890794677/
1288003322306833492895645196533341461462942313332318023546131642229515910173577701746711210000000,
a[14,8]=-1376549603314173033993410719696571398499848667026252247288513866763834501890132510538881732699089939008
6743212439480621237/6688761573620566201363270425685333881199446699528193509198720374265388538842124030177288638
549659148780986167469480000000,
a[14,9]=4849553251417914923703780721087237365911746690259672577580139169365198158254944037544353756850731138804
2882093/3046300357661408226805733168055296517671610570887517307585818908204743202034807554648236999443225345971
289375,
a[14,10]=1063091955684905777031727333224121685758224539511457290340654851099403/
320494002775018599435441487008200324383563206855306821945587735000000,
a[14,11]=-238443627328436863308299587802547257684188993797058860235304089/
113581954301261269851078279495570701749603586154326237984587500,
a[14,12]=-27437394461564625604146363011235067697389157952/33144019065041665325101568876771551550669359375,
a[14,13]=-509493001122134258064896011380136085552499202958873854520006132184266066389370262274589073601872473603
36/3489190558278911885931479440235200510914810390086850256262561676798959307418016861615306755994236678125,
a[15,1]=-1349063097094868823568548547703509578556359611998538413831231131980598259165668635594994498374109262048
92321749/408140148610451444180333654589186310898498064348614337683074455955187441564850055558156307676547400681
41736640,
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-80352974869605190092545693305082957111338867457637346201527429942437605477452667507190609375/
38696487707061751995303825242989919784241179466367554002836814611438235736818691107004134144,
a[15,7]=871182717136120703656653841426420334692282912844487374129196431228769229488653181243935071393/
16310213549004420022544080971229742361272858572886334759658671185629047834306945871364698560,
a[15,8]=-7889980618376586115266230825902149537691921204080711169966289863009911384909965138278512622792413995680
4462272052237399/364214167265936537289033787461964806860669248129761291555241993221661939695925571834479851625
8616353374367642719735040,
a[15,9]=1115068684106441195660477516689155484410831494823268176898519238985390829347820515841571555001551556739
05166736385547150/585583753388713579370086548910249902397060101676808440804950743840966929650928660001543885662
7355789077160995405234211,
a[15,10]=401546098507372735206198343338603579311603785545710253126575435957587519906068013/
107942329430069572702295710341651882326694186114767152561653968657328670461834720,
a[15,11]=-2511321295776241082610315529186349998458125385870967983074086220589376902703/
2759897072298488683515167036154482198722239779135105931147941177902732355640,
a[15,12]=-9371246646419882801600180160783261934732441586275878783624/
9938004478488871481726679830628718994672773925350689807355,
a[15,13]=-220840832451892099089078667897299888526123809939802377658205157823885040305584872863587741767579489981
9270217633929014094303259845/1247323689779393121485767775475872219994433969810225814339004216871577532093820796
87147289539989962573721681525767130115900745456,
a[15,14]=-120390636634768093909510429436108231735676234375/
14485578634153773378216715222311728241284714879152,

a[16,1]=-1122318265865852850995350774895227462804333161184112041088246754247986342163853720975013386471090704782
7/396907069763131283907558965465333600835764204391101727537623585752885022873144648138567837123223681600,
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=-672994868476391264576399389049710375525573310119308400251605239287921845676006059955471715625/
209160349929358902599926596864508961832445372604884941563230196320071740964917159497333291776,
a[16,7]=824784037334728595479983112602503402908313247972907247714365932946492190152050709076725851464459/
189542200785473891817855794915118764041842466371115483513468441609119228910847070778820622081600,
a[16,8]=-2204436424362489751947693090481507635897526668106400271329104047249458965888590513295184289285341606066
094056168944014229/98431624145401891847469853463676178304100192732160195344476392712843027994507939750824569013
3089471563176044686986860800,
a[16,9]=-3374236264045634261320896357696890417437895243095136380402965992065156848974261842167411105983713114380
12983674090/151055216552502456180741470244015457151522943344419873362100360614009152131253257409946184776178818
02556446220867,
a[16,10]=958959462864852763053532889631134173026936019386492294346196757941461049573/
232892692857112940118471497378089171010262863298505031611290603362791168800,
a[16,11]=4629608637354517180918253990615115164062224382213950605943488343418058/
8272881714466569419981262979917566449003222550023767889955518279497423,
a[16,12]=-83134883080072240153598208272248834319563445987712/
77291301966253726353758576368498597611951963862645,
a[16,13]=-793565152617014520824921015656498149102291393466015712588293905512183176028425285315111641496045226419
2068816330143700911823880661187/3779897471484948162464508688978887872166689329740707186511558074851064304439108
39426718271636403008935739763075993632592081731915270,
a[16,14]=8111860798432659016540394544175526035505400378776196875/
523557319364456319078376709143152030451488427796487929142,
a[16,15]=-3915413774695986897586728816888002035444296376577096632/
144245444094843356167084263514536826731775961208708097305,
a[17,1]=-453831424644926352653805269322046460825126211866652112478513811833740059238704687286981350832208371349/
11240310163873181557671040311188744278112874957619987124611155390969103072833279252623964597710542400,
a[17,2]=0,
a[17,3]=0,
a[17,4]=0,
a[17,5]=0,
a[17,6]=-8768073989338635371945725708156284854756713357673434386686058642621433964821216473250628125/
3041730252501211736287778938716669700566927492833625812585756909127886926262130038888512768,
a[17,7]=936674235600478862062444544778937271186148890296080642127728389184270147498756499761790978489/
145075359507808556771605851244952807412230336539105988299912790317004792193513675178575355200,
a[17,8]=-2041324128426562329335575801054043946710545573995759268160359020199126689034000811164498776754354909878
887839656803459/75339439980408086052729404937008217745375683224400537936287258566142816259929219627499213217924
1392698532369580217600,
a[17,9]=-5566892403013465532292301976581299792780570377591708114170397455215230432588876654418050763619356805798
4025310/2442241481854999370186317900206205174032193452770192758485593425673069729904847489958520068923365845157
031371,
a[17,10]=1279491268865707713491482737911018775086529595042476959045345887562669/
275511238061886968490119073313714780728678510610370678924791716808800,
a[17,11]=-4087980487539192340170513448077279725106930169551517747829587967/
4833201154773990809077951125261555272082482633707827141289511745,
a[17,12]=-297462531355964452287848108817959329739228880/300940996241285202152080481113533652329411301,
a[17,13]=-504914869809009981584532413237655992497478928674228047559764489552403088443129335261909463935365921654
69458113278437/236070301292671801822515359742573942660335430707948776330686700407295374428154982685883992798542
0340852120891208042,
a[17,14]=-1160096801331805503341478180264656238261080881503125/
27289863891681224386388172356058625854451627221277014,
a[17,15]=0,
a[17,16]=0,

b[1]=881053238627599868596273289/21406434051775068046981414800,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=0,
b[7]=0,
b[8]=0,
b[9]=113326095484952741159659023743780093812500/6881878761394565397307641466874397738551,
b[10]=87652211264627779008536127044197522671/183104100632319689198327679539207468800,
b[11]=163922610272674958307145282127312470150044905917471/687160318124187157422012805763825272826838532243200,
b[12]=-11081319127104812683002085692/3030190821278937330670271525,
b[13]=-27099401935618549898054457182451804972798160758875846191036494320901162810356159842133150725472065408343
419970434912150625881397/19700862752484777440225144175699550301410698846624867534310758153104955825223243467592
49670169158257719446643552917773357308800,
b[14]=1133317756013304388069367858593859375/60630543708905121271802239872385152,
b[15]=-7546670002972729941281903884234494511/2526531491690153802966967212119439600,
b[16]=11605718738136253263250999/938657086513575908519040,
b[17]=0,

b*[1]=58011152443290305884322035024550567542851968671469/
1411574163587294692546584815830228794156708980303325,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=0,
b*[7]=0,
b*[8]=0,
b*[9]=112628662236308178858155855104488834804308149915149435415864087500/
7260831754063528825585223815979212382874611770201763781808323859,
b*[10]=31553904631353366368537023379208152110020514484668603753054551/
66407959116815587392536269242477154264726149302957257183166600,
b*[11]=43286472513730755102592548767751797678831024278202486021275092754544887003/
181249758639944266809832383764533594012347190363039994925639326234457067200,
b*[12]=-118696646507373809221304632131632810542048148486122092/
35167542394645445490960152247666861913438143557503475,
b*[13]=-2374127697720055072578096558244977299554321485366894446908676482598865572446067236672565394518003918649
2635533171426342059908196144352197346155803386731/1829141376031705155493333918661905801540474203496843726774279
860406184472656516156346424401216826540240516923249101023527516980583044879767482044119296,
b*[14]=7834803636773951948936338855547668920918171586843978479184375/
469107358150552861894225531392264219284533631305653184511232,
b*[15]=-348471825947942833885218864703032181154542377515361600248/
13113222190440305106098569410412438793797814655337099755,
b*[16]=11,
b*[17]=-72039150355281092230903634700412702541306886621/1815631689605831683999324393193874956181648420160.

6 pages