

## A 17 stage combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of the scheme suggested by Philip W. Sharp in:  
See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{21}{307}, c_3 = \frac{306257}{3051525}, c_4 = \frac{306257}{2034350}, c_5 = \frac{579}{1732}, c_6 = \frac{67}{174}, c_7 = \frac{233}{2359}, c_8 = \frac{58022125508675}{86529918498374},$$

$$c_9 = \frac{725}{962}, c_{10} = \frac{386}{723}, c_{11} = \frac{113}{748}, c_{12} = \frac{5}{6}, c_{13} = \frac{5379966192315761}{8364939490971553}, c_{14} = \frac{38}{39}, c_{15} = \frac{98}{99}, c_{16} = 1, c_{17} = 1.$$

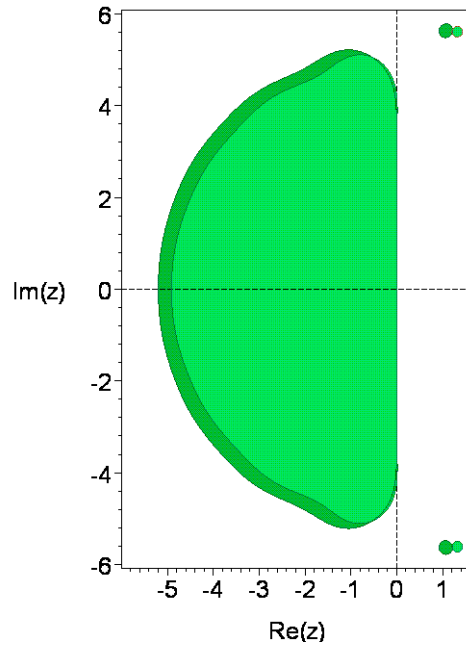
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is:  $0.7943642002 \times 10^{(-7)}$ .

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is:  $0.1487229641 \times 10^{(-5)}$ .

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 8.578813358.

The 2-norm of the linking coefficients is: 25.19648893.

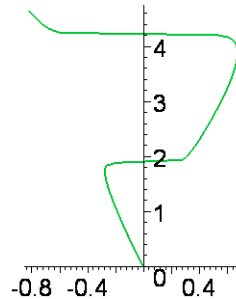
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively  $[-4.9084, 0]$  and  $[-5.1978, 0]$ .

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval  $[1.88695, 4.2167]$  as well as at the origin.

The coefficients are as follows.

$c[2]=21/307,$   
 $c[3]=306257/3051525,$   
 $c[4]=306257/2034350,$   
 $c[5]=579/1732,$   
 $c[6]=67/174,$   
 $c[7]=233/2359,$   
 $c[8]=58022125508675/86529918498374,$   
 $c[9]=725/962,$   
 $c[10]=386/723,$   
 $c[11]=113/748,$   
 $c[12]=5/6,$   
 $c[13]=5379966192315761/8364939490971553,$   
 $c[14]=38/39,$   
 $c[15]=98/99,$   
 $c[16]=1,$   
 $c[17]=1,$

$a[2,1]=21/307,$   
 $a[3,1]=1493796999401/55870828953750,$   
 $a[3,2]=4113508352149/55870828953750,$   
 $a[4,1]=306257/8137400,$   
 $a[4,2]=0,$   
 $a[4,3]=918771/8137400,$   
 $a[5,1]=7023253481998477419/30457603477507616452,$   
 $a[5,2]=0,$   
 $a[5,3]=-97755726263210448525/121830413910030465808,$   
 $a[5,4]=110390085114608940525/121830413910030465808,$   
 $a[6,1]=35333589737/721158606756,$   
 $a[6,2]=0,$   
 $a[6,3]=0,$   
 $a[6,4]=2891131475140625/13903735347275508,$   
 $a[6,5]=1635923156398177/12768410644066017,$   
 $a[7,1]=57726863589640330793599/1103754300430686614459883,$   
 $a[7,2]=0,$   
 $a[7,3]=0,$   
 $a[7,4]=854773954222709757941635981890625/13182962564788302438723125920273062,$   
 $a[7,5]=-5746145167569625093280439800/133196712545129579701764008859,$   
 $a[7,6]=562671616377192418873593/22714748916948279191340802,$   
 $a[8,1]=-2248112151938048478585028345059959255585408962897270593635359941463814262941/  
13115342932591318732131957000841006154717963835710037309623494174522934215656,$   
 $a[8,2]=0,$   
 $a[8,3]=0,$   
 $a[8,4]=88773429949226461875921220960089984351266789166558482123611361847067343757100789578125/  
78323171577789868621278160013837560555787522523356857598468482978934833296778245594792,$   
 $a[8,5]=-3103508484908290342868171745075419084529005897948793806644097634117282726501294473/  
989192387428021573011431500054096667889068665908349529953787785157138553058162305,$   
 $a[8,6]=387445208299140479491205772213596172481454686515393829684442252198790043570263/  
134953821496884911820568390082182185551789998844659390078369875343131505544632,$   
 $a[8,7]=-1/40, a[9,1]=90539897846423885342425/6673640649216111790602864,$   
 $a[9,2]=0,$   
 $a[9,3]=0,$   
 $a[9,4]=0,$   
 $a[9,5]=0,$   
 $a[9,6]=4935542543770717360006526953125/15064330873087630582503295797856,$   
 $a[9,7]=3544615296572993846090141135546875/17069826677891389973234139246484272,$   
 $a[9,8]=47457285891681098636442355735499629656205434725/231740240106382604629794321851908731522163825056,$   
 $a[10,1]=1496387416925692254309409878366076/216223354403135981771469327501665625,$

a[10,2]=0,  
a[10,3]=0,  
a[10,4]=0,  
a[10,5]=0,  
a[10,6]=233080769118300514148546292701995304731/795679423102304680282477120678717519680,  
a[10,7]=347585241862292612931712158787610190675692626/1563685431708643820885944324515894822613213605,  
a[10,8]=18780396686821591675316103228347013535001648667215081529145938900825901/  
1435651231851718478754562631879933669408266015378387534966589074257543750,  
a[10,9]=-4374789197516079412558434640051801547/3278591696455518794927842331961726600000,  
a[11,1]=767154236362779744490796713120647203799429336361/21060948617239322508900149445209983880377912800000,  
a[11,2]=0,  
a[11,3]=0,  
a[11,4]=0,  
a[11,5]=0,  
a[11,6]=877662906511421288231687484532957256722677412650977/  
155004194546981095555740964371691738533323778412216320,  
a[11,7]=17312769190447438982502545810919439778930562655190853566471/  
152308702367739226197201079773279007814632413759438207317760,  
a[11,8]=8469536282655075969194066761503037103420475514982292386979854283685486513630407579991/  
839026207222697267071138055044464889717324121283228189362777002242867497521676054400000,  
a[11,9]=-7616833532906796641467310112651434312299717812667027/  
1916081214628193295558821720509854888279948623155200000,  
a[11,10]=-13/1203,  
a[12,1]=958420581536111200392604574358716089579768736243/61550069037060124768210350918155935532819210790000,  
a[12,2]=0,  
a[12,3]=0,  
a[12,4]=0,  
a[12,5]=0,  
a[12,6]=142384909334399005923890733286476379157277724580057627/  
45299568641420293050919261118346902912128338635134976,  
a[12,7]=29906406743422098039141263527667266435822364243254026644087/  
148372727111412515339423749114980609363489449029218400154256,  
a[12,8]=181536551573600244282703541029252155041457603013152726649408994466995190675711228370033/  
2452032048365967703556879753631081835341601241129406400435225761840804259680513424920000,  
a[12,9]=935783315097364918368971610161057177887739681482187999/  
5599697011959106762448497292213956329082218936495360000,  
a[12,10]=259/4607,  
a[12,11]=292/64693,  
a[13,1]=-3401762360980808796332740401013199037990578747143534665633149180099146180450041648809536664223495449093  
202847317800053630606729084319220442489908541525906398458836162547/15775054954270584781700764290782962806885692  
93505945502141529487523184114067490198473078068611529970383211243040633278932611498580745492120150220932591195  
85272618979537500,  
a[13,2]=0,  
a[13,3]=0,  
a[13,4]=0,  
a[13,5]=0,  
a[13,6]=1200752947584251851477756335880324271476521846043064553153096440815102925309224185002444258342623776309  
313827910083176931600231302517948262136299108966051996941482147090989/30078009924749207164764694658816647929520  
34532932554385621136816356868265083406812486110338465766377542959647077979295837965139421084097711939714118189  
389044733074879517440,  
a[13,7]=2510873832123859692333323258865195366393872174548391639581674685743564923788239023899823217688705267678  
72136725976287066862622486727407261582923055172286163323724296070219521/615471872173854683545676113890569999339  
76990878468324666102416383117301902990745573242748059448470127850526392941622861191417750329132893150778197684  
6210100760251231120353835,  
a[13,8]=2123705321164706986652560306095955999695999299103178824870907804340193077428198491018752255819391459388  
470934660852757417744077466725758255206428130544452807543903830040999513534909866704244437945538398113/16281003  
66040093156044452412529054792608737168191194881307444396489587050595152892846785525249426122770606686517564357  
2718419021209995012951192597154237000754827537003027061686625404650121083271860646675000,

a[13,9]=-1550457638887862015542914743826521955211357628398488405660319258443678583234910260969005529274833927194  
06223658242970367193406338464202203413625908868617543239067664202810953373/568283588312544800491222991256785036  
06694931500370034442838620662947278836094182860837890791395144231178594069757739105495557272831366302718485031  
11399950824889054243944671200000,  
a[13,10]=-354096572745929658614087563886602590205121773482316996159271868792902731643630063041973646009680637976  
6909775938176156311152108037/8662581617584891414558562420493118438952155921539630192838528665485195641141942655  
4903344121678943428060534443036411028928607237820,  
a[13,11]=-173761343166756721973298655091778153966052302145708737616369213719683659688427519384123148291273170353  
6273485079643900512/8569548424787213667214055438183190607837998169829953817381596517065613927811326475404892906  
781992127772218963421906910485,  
a[13,12]=-51351826034559917989923863879366951825614091062536561709220999047375873029142902597461975472590610582/  
26117869650556275118937181148700685470003891915156740765819158236394961168920304950413461884499059622705,  
a[14,1]=-2751529379242514048718231525204323956003431447760438009571661942083874694220087441172787631419764792912  
238282/78265775067001628214734057363516454276817065605264784486846931715484703841633727850211172883570411098184  
78125,  
a[14,2]=0,  
a[14,3]=0,  
a[14,4]=0,  
a[14,5]=0,  
a[14,6]=-6526803022444429519515959869940650302802391992470777545655990276751905664544348323804209117109/  
5547541464226225712924661978415208486282439846438783635146951741239114143026646778587375007552,  
a[14,7]=2013764677932430341072538481857149468347175466198892410484477527625936383169748282668111787275505470/  
10902141638385498000293331044305684981676074100277039548624886356686260171104166090974541559416997797,  
a[14,8]=-1999145514056063987549984392367740013154927706223272968131925799929214696919474315224010757573975670235  
75565614289373943153/137504272067518151816114197527307395066490593443688209135080186056693347854981287554757857  
647606088913415733602141205831250,  
a[14,9]=1797121187670501952952193858453188855295374282442344686181624295181942817994106723308273688862997868638  
77745920959/426705364344537106160999918640645995810758526646249937766832649373931435908123388123517448538836549  
98387704600000,  
a[14,10]=42715333394459419305121639910242646378001053320037973646462269098071382/  
8121899779737478267958778439102177881700568311138394031068944547990565,  
a[14,11]=-1234647075222067858533591390604775930704688373649386864806884096/  
973297869545290566222444480271409051140994518651791748189884765,  
a[14,12]=-5687394715061340062751735209335869135249168/7152306735070366977581673062042099296291435,  
a[14,13]=-870734914226484447173804405675990038652311194550866222793587078237988535113085954400039755280724708705  
2280/164351543994976853734248423325357273739454948248385600909444285139695487535576810781848353851858974388231  
,  
a[15,1]=-7747643361076110575153783694580923501029609811240560767956787447301282577232171867025148749415733813823  
47628004994166261756/173189050366859974699427900006408864042716235909108983257042068924018725962287155087627668  
1425900976774240659809207291244375,  
a[15,2]=0,  
a[15,3]=0,  
a[15,4]=0,  
a[15,5]=0,  
a[15,6]=-2404038027871191021626652090644118414368040756096305144428244989242641890908651862966553405563482373/  
1388383776672893466172808085632281283399602931122848919960158313777427788136300069258540157354565440,  
a[15,7]=6069520246951931742983394442452696966874240376174623563738357984715459490737441101363259592781919002429  
202/2728480116702596271652852836740146555329341381786750972130219227058775500706123887639832529024000169424965,  
  
a[15,8]=-3894751917093496045692592190143496226853938507086310539119628782737422248255715001646752694997844910322  
22172580078443887038131324051/214720525599031720537613573924442010086698677778951585144853743641007638788794129  
412497171880969311357239050375624125296270177623750,  
a[15,9]=2826087557676483036764958595483939054068175081955744024205747384769353207343709433958213261734418512825  
085076185359469017959269935307/54263710592336199964640875453208673709171298107243102217715876386680781134102201  
4451322598809437861079391451504418480730600766840000,  
a[15,10]=467451325223836349034752328044398168824259006225254251939418434839637425732711302512896/  
67632993093671051358160612882786840615194132081115367819346718410464022093512516898135,

a[15,1]= -4990518091417719922701967801142340599558148041967140997871533043168613470269612032/  
3305828778407712687375365465787561745740526124830460496456983961781248026978926215,  
a[15,12]= -270281396349402918611609312875161201643203707388902411034112/  
285577582106520194020622973118356612317286552523904045247045,  
a[15,13]= -296262352482384678283439512353627796569243546481261770082123843728436911780921968882332267451078968398  
972961830482174315434733924118836480/42972305426870345901918665781958179205483332383546801047389552587894644373  
645962142920025905008939361926828815815320519881233139364428283,  
a[15,14]= -1131979786549316007947392253649073424655680/101208522074076446386363779495873532730518863,  
a[16,1]= -8371996198241109977248814741229362991391661490723361120256906772829625224639042373419449647106916767610  
974596469861959/16239321778718981929445787898959709861162711810238639786235173502158763298214119655932556651309  
659352557707441940387500,  
a[16,2]=0,  
a[16,3]=0,  
a[16,4]=0,  
a[16,5]=0,  
a[16,6]= -402317609653892154185638980524180021429710798064107273183900341135296938813153770380045328012975099567/  
185454822898763028685064701461754678667248312774779256447430087859552315331301226602029077402114410240,  
a[16,7]= 7534292673845365087426133434478401304125695134639542400954608756448011983327059252401569504300483184694  
6719/3037163338934475491376527752647111707897712102826411273799388301335860076780010052124975336087844138296184  
5,  
a[16,8]= -9903283397882535146863666160771952439247798225489776255642488796112073781028581913101954704712302593102  
855075599698276848728518994847/4780253332058303261981100258295937012390653421323745963006525232120173395259985  
6368539620679580123113211011633835836110574025901675000,  
a[16,9]= 6818181182397952435299626393297846503947974853438224458678813422743686331042962242893180609627010323171  
65675472038572789624920611963/114487682398058214685075503951880146082589473488483069041094163934610965029891535  
543571152642573637287752169454431843897512888800000,  
a[16,10]= 923276534741825602227098536425532659363995022842121191961012286548062253408294957/  
112950597288149936357443497496066761189822944736940037026221874940944927857084800,  
a[16,11]= -2562738744400406025759343746081599930354590364915625149670970022812838195149216/  
1544500089860356078223520715625003971085303203129476282871728017132615801964995,  
a[16,12]= -23566918580890157075772751141448004631399782558545562/  
22014146361608951251451630267829350546367055010724479,  
a[16,13]= -691181771308074455637706737536152270738144581930708026937702868404442489803301361988893735915490002072  
873987264714316548843795466956998014786933572/85232869648215236890776333157769359047719639260116678998541606431  
668110675513398139790045630175554226892840891149733235928673938952986935178279425,  
a[16,14]= 1399579168415165410919620660824804834617502809255523/  
235774645077610250469985954655477629059197085467061100,  
a[16,15]= -5468730954886127105808730183550387914723575939073644519129/  
267483096292719279683557437894227199704252908260428402684800,  
a[17,1]= -2664759628651445992309031042838362587563132130136366379990196548975648363835322832013207372725864650432  
655166366459/44120911081946746935064065495740359208491258676482962387019199019336372971848307579377641738955875  
33037982210437500,  
a[17,2]=0,  
a[17,3]=0,  
a[17,4]=0,  
a[17,5]=0,  
a[17,6]= -158281122879028694252106283695993948481058064786649558874802959246615138475592982504998991142475548303/  
71599302978113853653187742773043635406246804370934579632703389560180143239997312472783750369785286400,  
a[17,7]= 4935429275200586895883132648083993117038175736251771181772201327040493229641894119359701877682651912072  
913/1675100126422678699274355353773142032600011758349295095735481923732050075516407621965033067932513670502475,  
a[17,8]= -102496274527715323549555332578549061157439936109534736937459208011621779622279614071462209013237268439  
2272673704048586415437419555821/4454732367199853808686373924153079538328220968238827563131027262659241173147034  
776067693786788808477427636353960206642421876639625000,  
a[17,9]= 5903431148393633781277197142516613595945918370698795737237051394092482191060569950094926038718889896313  
8875907010371129134941/9676795625731771874969028451767484988703974182139940511071256599725545719512938100284235  
183537277565421549586079452756000000,

a[17,10]=467623606093998909244926036538192949694360480850494823581123592909217334742959/  
54509124583456123206115497895314748982659218519519456104918159121150319315660,  
a[17,11]=-31572806415019318442272403670202707402587608638847677582667450958078718112/  
15084911709226062383473479655442886365710508133137825245970358161148722675,  
a[17,12]=-191465699831174200258126008131802539735806548984306/  
195831604639706634733670047144418794918590679968475,  
a[17,13]=-137383218046198477921254027064646165452634770133184289497606598986729837811582091673349241489001138847  
045081103203242507396527152/16370985317889476490862748198052858356551356832752352269469729885124988834117963499  
138647062192891682477269522995199113349469425,  
a[17,14]=-31029805056990969572010861230149272253890550689312/650189162884018000005396697797756010472724991237025,

a[17,15]=0,  
a[17,16]=0,

b[1]=56270662855320530489422238629/1330492002377622604838367420000,  
b[2]=0,  
b[3]=0,  
b[4]=0,  
b[5]=0,  
b[6]=0,  
b[7]=0,  
b[8]=0,  
b[9]=270520442139434259889528529578418314921278104/67390423336073990475386609988658283535076875,  
b[10]=5899105386627591617472639702115098624104019/5125932780637235221878647020615805447680000,  
b[11]=53542072535335124619482689054488063625271189504/216194199740898923621636352628782962043771962325,  
b[12]=-148006152496168424738347400712/43423492620196143142117247125,  
b[13]=-59544026392763443552846938583351261547540849831054979435994694668050860276394583664780992431018213685589  
3798419989502323561457812255429799/2580922263670139490075509622887097472099108101043929573769108230354263927466  
74792349260760346518483059319891409031960643462840686704380000,  
b[14]=46282572307471465752622283953089/2976459487061194088477655440000,  
b[15]=-95366987031350782580310103777986206097/3376752404088644109489796468881920000,  
b[16]=443593476804971578692348289/31791551099251765823920800,  
b[17]=0,

b\*[1]=887383011649158433441496689192219206306045534886543903/  
21078484756996361553138725124374782834598413028226585000,  
b\*[2]=0,  
b\*[3]=0,  
b\*[4]=0,  
b\*[5]=0,  
b\*[6]=0,  
b\*[7]=0,  
b\*[8]=0,  
b\*[9]=103847204299669876255877234158146349161587055474133717167778086729365684/  
29893952191007953089752787498170677455195355547627622431246095889716875,  
b\*[10]=55037385360941049417315975070725690980516147349113957238531140659953/  
49740038775687900276944872126800996435221849571837083342771528552000,  
b\*[11]=4767240388224661724776975074448943045365396319142977415722770066473530368/  
19180467345626767832708092087821854918342070043543109841653852014377242385,  
b\*[12]=-53280501365260896287898471871603349948768100466970920092/  
19262378066407832345020176484350681728071173134383919125,  
b\*[13]=-9627212931065959765236246891012622881650607522746503308917173596378376194376608417641001520135878413636  
8071778437614175322851463216019083013819619864529023647600779/4579521121219179051504976744752651919335918860824  
73257520558123929858744433194913144338391865296650842354451125012578656966365237442713033522980690524010167223  
28000,  
b\*[14]=23409143076065468255981046143508082484985767123521660101/  
2063028144429089691612377103235429254267974497836784625,

b\*[15]=-541404364533726583475064288171488403557634017968290807393771/  
26748309629271927968355743789422719970425290826042840268480,  
b\*[16]=10,  
b\*[17]=-614960062104362379215006117217101483134289396479091/  
5641009874056002751365674473396730308577056460604480.

Version: 28 Dec 2012, Peter Stone