

A 17 stage combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of the scheme suggested by Philip W. Sharp in:
See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{17}{372}, c_3 = \frac{23864320}{359332851}, c_4 = \frac{11932160}{119777617}, c_5 = \frac{131}{623}, c_6 = \frac{256}{1091}, c_7 = \frac{53}{981}, c_8 = \frac{2232029526055}{3502360286556},$$

$$c_9 = \frac{420}{551}, c_{10} = \frac{1291}{2581}, c_{11} = \frac{653}{4383}, c_{12} = \frac{5}{6}, c_{13} = \frac{286121317440906401}{419411653541925016}, c_{14} = \frac{73}{75}, c_{15} = \frac{88}{89}, c_{16} = 1, c_{17} = 1.$$

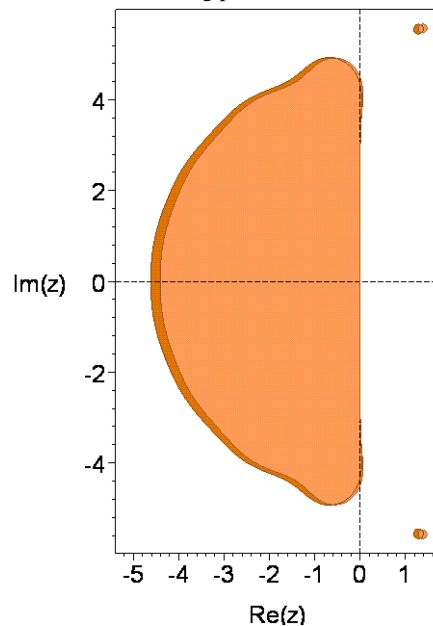
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.4047387027 \times 10^{(-7)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.6534687618 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 30.25129804.

The 2-norm of the linking coefficients is: 47.76318115.

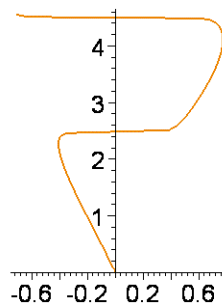
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-4.4066, 0]$ and $[-4.6160, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[2.4772, 4.4999]$ as well as at the origin.

The coefficients are as follows.

$c[2]=17/372,$
 $c[3]=23864320/359332851,$
 $c[4]=11932160/119777617,$
 $c[5]=131/623,$
 $c[6]=256/1091,$
 $c[7]=53/981,$
 $c[8]=2232029526055/3502360286556,$
 $c[9]=420/551,$
 $c[10]=1291/2581,$
 $c[11]=653/4383,$
 $c[12]=5/6,$
 $c[13]=286121317440906401/419411653541925016,$
 $c[14]=73/75,$
 $c[15]=88/89,$
 $c[16]=1,$
 $c[17]=1,$

$a[2,1]=17/372,$
 $a[3,1]=4427878597954560/243893518081377713,$
 $a[3,2]=35309357681868800/731680554244133139,$
 $a[4,1]=2983040/119777617,$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=8949120/119777617,$
 $a[5,1]=8530690583328916991099/68854490995490907750400,$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-27997590046327621099377/68854490995490907750400,$
 $a[5,4]=16972565558473115228539/34427245497745453875200,$
 $a[6,1]=359353244864/10901622991065,$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=84690115974809792/629831456916737955,$
 $a[6,5]=259635462073745408/3862524851061879651,$
 $a[7,1]=46853233682675005838591/1482403221351048704163840,$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=201276982910256006270189000568576331/5903142795317229012233683479924572160,$
 $a[7,5]=-2185924608620264731210865965/66386599554320775652047563196,$
 $a[7,6]=540001741601777309544259/254108283780713381688508416,$
 $a[8,1]=-28875288485909793310914471099007472281331237448277620424092627090786013/$
 $14035426272054746338022123757735086908862093676543691093953983230771200,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=4847336041749111481445582011716719037886215318720738691269609415400450873429817939647/$
 $55891085693657998936810037482522867540318175948081530735505937129335088216853708800,$
 $a[8,5]=-19014446825707796772830786637085722549022084255530679988956860503437811862061/$
 $628549783268745435357193513130914912525609015941335724773215309532661857280,$
 $a[8,6]=58458715781541901840426575477845521747626460416509429763326488857396072407/$
 $2405902814264040591260566442569106152124324992397056915962620009124986880,$
 $a[8,7]=-1/40,$
 $a[9,1]=2982274650469103921715/18093081331630886288608,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=714520506951165431516584370625/1592115687435522802004612958304,$
 $a[9,7]=-177609735514426858945996680000/1144899311540645061539330699431,$
 $a[9,8]=10969988106105117887398833008131065172869120/36113355513241734746355392994293613323422123,$

a[10,1]=13630729537815404745666851907992107/103934645216377333940514722646528000,
a[10,2]=0,
a[10,3]=0,
a[10,4]=0,
a[10,5]=0,
a[10,6]=79999153617237964857206885011604994907122377/197328118854235082328668582289222013768519680,
a[10,7]=-694726900588025324602407800067134007947583/7136376193559013781113801243479365392007940,
a[10,8]=73236564016537842471717059784040497390264976380763493962297159488/
812878201870342425657263043461841283200921142822161683699493010375,
a[10,9]=-6312429723466545732868601817967786373/216843709132526539266076648235474664000,
a[11,1]=559425566033602781112948577398693409934003450011/25913777035812190885775333590651347805764831744000,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=127995601222881074878701817012467504037359066987607292897609/
2410768097083742530169998887837372039901032453873807447183360,
a[11,7]=97942364887230812215493574773228249742204848067509254889/
1076364031726562490217429011481232250768341114388169246980,
a[11,8]=145463046626216804724637268854662700280287202683156592965890280043707237446866656/
472903624698652454406692709538210237506953632850031556415321309274023541947158875,
a[11,9]=-3097451750593990973686210591007835030862617302853203/
378455871270473469005983313891704627685642125596504000,
a[11,10]=-62/1579,
a[12,1]=-1624178346026140621213162590796289772192314690119/2914634560093846687076688304875774812216490393600,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=12673459689670693935644517834500855469296607813900828958799/
27668317609277464879884705049124525377977063365018298286080,
a[12,7]=9977763064430819774288511928186884418650703005222799821/
7412039821425867796512165483857903711142768557408620864,
a[12,8]=-35857669348165357385727272045770718062490453117466684446801866577320265802604/
158302129789363976687496024759102558258478959834559651616317764767082330160425,
a[12,9]=1501059718336060241151564280088196890878551006550961/
6080938338326188632038222247502554862651528204876800,
a[12,10]=567/1060,
a[12,11]=-1089/1124,
a[13,1]=1397244873694151351383678577610709305394852653910088742226955657817965898819709307847080346221424518726
590373169860103863325293375085014364315396197120061360055109224699631794307/32167401970791515775680891754767236
61517962340333593135554879136726437208463217488808111070056157764842835407136634158671214090243516836824573715
665514917166347522863244771328000,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,
a[13,6]=5321661742673234086690650404059893878233805533943568243365923757048711921544948411452129449070986565034
2307919613769102094822403037855673204452417291281290400570018659015170110680829699/8042059891040431258925354673
86629514142457634739756771624870523723779357761025568351233237663422944946710493825181739423508952640067986478
80886643185936946826806673493939625176239964160,
a[13,7]=-3227678438302484807185730258256353189785449331661715835682706480778123356117309329990630223115844715375
8773485383578418256260059051501304242604021539704169498635329800724556652365411/4952405876603165159021610457577
05904662731497769339080321907308000486618632737948420602490019044830651511047760076056263598588260364287123894
81596698158257539509900985483431726612480,

a[13,8]=4083841919641795533851238683208496337517389695556813707509575361583182557326795637107505406080620695507
575023306507567726626700127048965900615036201900476818480001367383076680027719018015905469927073249/80129293396
95425245851473879804622926857926016661342988152118840228313381834970509248445842214035935245599800029321615045
577726224158451742551665662765302233038174565691358890712625911625519817583648000,
a[13,9]=-6524932163397709842563291631137693177023596536066976087196983781909350331249003024904243401468116812894
773278291190070647034529780954835606904430208755654194013001784962189287901579/59773471215975090480864207897706
05656019162346254563281464560989017171236381006329461159877057952200091463736584365069338005626631369281142320
4488646491634575759110091281167286272000,
a[13,10]=-516572918105481363797440868486823267317154403083669574802029973748237343381393352492679563879411387075
9219092609610056574557054082722847645/1766555619482675021696524766387063303417171382939681855540340241049554936
7837232162152499274246370560294326972617668769141508532937230385152,
a[13,11]=968412114975501781949583522488537642022426986961786409182811247186097065747933458664791653975543571291
2418804346817358797860775/7296530295731005162841974311345657068898520880161659266067223393060036059715630014803
5961484785138560977160661192384594105073664,
a[13,12]=-139089366153339698900879658800261824308787184518746663283227281336230024311985546058443496552910084132
12387316275/470098462260354299861296733991835473113353265079506464315842299134367844853461305917320738454696317
8076508888735744,
a[14,1]=-1406712850125554738834053432134231645781566090017825211810454311557895282432199786680912642337899528930
4052612323739/4547662746749081443337912780736215812114452535792836784459229360641008418573842487435387964111267
889375000000000000,
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=-1043596043189357074402820663249510095321930232853581147131473166894233042356432207348718144503225442618
9329/139077666488804140318287219439349330957403722668415937736481282889751892844359791795565212278750000000000
0,
a[14,7]=818926273253921725479021147533922571713122849604471095487538299246654821490377704077775483248981940113/1
26882740317842565841397047486794142572115724136193382068322132123234929008270344008968693383789062500,
a[14,8]=-6468578558061885998140352917592306072390263464270036332077690241299836137487004697385691789168745877006
7524139617835456576/2681399514156430167778106172880072032464194194191413246285056833343591660607671194834588050
3508997872409626522979736328125,
a[14,9]=4047495597079341625620104630610841198847284070624246551792803516349063025085415113163750738696451181626
10083240348372213/926086135246154854685903220531185321758193297108741458312217272770403551802404805183491357021
21644704492412109375000000,
a[14,10]=27555338695160260616336091014413744616906203763520602089614953395896867184758682/
6710378726243940117892432068849845180828781944162936443778116658805267333984375,
a[14,11]=-968887827905459706209295763353400170441257616982202110030050804680244/28058265310553124551950242334220
4896764249394007617053427423095703125,
a[14,12]=-35822722147517588585839604930502779266175529015808/
40372670744562900480222933528396662773106591796875,
a[14,13]=-996083832289317707591476837478527481706476917095355422924016252753596073305163796793643411659704334197
53564117500525543424/296336550376656939723875974487601800426198890667351490425939698313216239046065526049153845
84225544623107353875152587890625,
a[15,1]=-1065243441615389776256835144993513206365601840596752111845484652114589684642400082819111533887673762087
05783719632718877477407/316743294343582648756442102757510744610306119352906708511031530365767441406831428084447
75086343305895082297965266026364760000,
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-1853019642831568744066928616862203071658706882303255150598303237472085330029084404139734808323820936875
41/134630951650218925674836580281191449271974015185027155911111482611390666375344455694339790456150865976000,
a[15,7]=-3658649782777839441298501218038212352127031064625253734926477840745782110061907744818398188120607464384/
530608028417623729457241150671664023962152084112051014815930259600739273758541708866916817823891086075,
a[15,8]=-6035564693014430243757485556381743320001539198883109151764139231214308273533436201465001161652705232413
7568431421942540013568/2197803521458647025640675043914942204656823179510582282897132140777536641220198135238245
4553766417278976344870574455088504375,

a[15,9]=2875841263452663587369046952750982895021742268427069189186322050993620554014099103601660300168916561994
176155715231839422549486133/53898606428862872241622232141394443374808996515583504565796097988302777841217759499
7568793532689268338613022318194001248054301875,
a[15,10]=4924460130713575721829247058478461906735688064238259752486213073968599340232984142714665729121693/99678
5359863399766510834562999640032088114156642169733689502380377063758150098896124188925507125,
a[15,11]=-130574691947045130380049741606619300417295801230261468906445638843364282867161271174271/
39845244784044579260124968949390972464647903102043321865900347736634556763451759275650,
a[15,12]=-3152222971253265800127754525485416002903248438716768558252478653184/
2976827095156609234716661051770046153242697373280863739264696293545,
a[15,13]=-375926654524828791017555439600391265219612832954138405770624063589433591293693298620019220091047472198
668533872228556367158220701557793939253868175556608/86427473249881143590521155017028821971009889536759190101995
460197781887998089261638393213690597306341459998501638212721332640417704210903088816046249875,
a[15,14]=-3464689379398115002815717784858880707585067138671875/
309857586577926419595435532479971452053597049987583522,
a[16,1]=-4977967853287231206531138691746421403949309376263498923609324154921056213099544998237399928766102195379
0577227730388532351/1415540919858912401462007570331633434954538521356275225865658664109801744506099649697365635
9465369425956698261998583296000,
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=-1431775285085954196300891871433015533036312005705262723074556581034515430268371441217846085561426325623
052957837/72856637652982010358898217360298351504017148423698723717196653080607957086298255164489379507931402962
0747857920,
a[16,7]=6368037198669070379426536123622250276860864420830953744112913184663264517667639535340750608405508176483
373161/89732144587521960963612628542979971221046219451300319758438991851993204810653168855505361308602974897011
5020,
a[16,8]=-2773788256731389601072059888081673360573708381040295753202160986799306293628814640971391798061085773236
6116327800413167753794335936/9291869553435781743799619380662585034083799810230533227969502599773322324879170384
076245833247198180770341263722193888248445887375,
a[16,9]=1350371969675614944287461180813945704445206276337456089574590788623024846596561596326749341525162528515
083951456487540215082872809/21956624519202471841660211867471933613138117651933084624217758106676260603855179131
5912385354553868878364480429538355399704088000,
a[16,10]=44586228578572603236944815163678222070973908813664760518251162849638391731562125772396161409/7932160652
836069473633035501893051175830275237367275673781198592440352439598079146114605088,
a[16,11]=-278835532428843155739297488287218851215411328602076300732622117630275922660669509670945/93945363502602
261369386115793348463791999672313738481360826689851063040743290621442752,
a[16,12]=-388794812923358461641853875149542052466943623679986382603080/
319011079361192811599948581834935919500422455815550010549321,
a[16,13]=-518683570054741907779345505309346398909648594204062638481918018184387318799314316196004395289735081136
55111653407428313496672880217524975103443773117407232/997558534855774072813510521631386251176170886357806170535
8420115571084009996159406666381785086391417648061630830296165124653316651130923423230471594026939,
a[16,14]=6599560381630834667670539214021225557023138961212418060302734375/
660729076302224153654696956868150834369478603647512344266203865536,
a[16,15]=-3059213122789344841268153456899726082598929335302186418304400375/
125060626573265568118364581184518917038969924471602142756286213856,
a[17,1]=-7689508918735867812101577741405056551446376511560610855396577566487612972108342539858881921504379072783
47303634605171427/177888349854707696003658257217902620491442290870418802879527605547825012146555256424944140472
506380558605769297966592000,
a[17,2]=0,
a[17,3]=0,
a[17,4]=0,
a[17,5]=0,
a[17,6]=-1649992019321314845679913504724790339364853778057408222623349981197275719174305720121618173541225134820
4566009/9155755843033557278649866392007142580076594783078289557871983270508266070782680907428860048157071329111
715840,

a[17,7]=172111464220678193447093692106879665822479368169073305816374500588999770557913881378052605758077819214178163/19477537154463413698981039534494937718342207918517072358535300717724237014693195769525088604104037689141660,

a[17,8]=-7744245931232364295577142534961712666645470205594744570724557280760306293863150479818040273599959326674835836177431018168865499968/2218614174694583660685517979318413629130665055656019035276656984210460856168553139916530300577876346143310105356168656210940204625,

a[17,9]=119075585054266154356193352471035263259530854562896697188325348841804485270031802775577230721692262292997777600586782820348971/18878538696739996241267565557267597852138708641357770251379849798189631561044289553211547729774466348327322968818986175272000,

a[17,10]=1550891153840164321734862723066701175973114186902825036406540002668856536995567559553374/24950134356220392730318956621863746821106014066177780432625727279316135664032740271613,

a[17,11]=-956504052245025325047490194554184494164753278778211874081022583350235417618205/225244288740674975099266430243219617018149915540075512015227869455382137671412,

a[17,12]=-5321757933662435970732129936634353336696825582056418880/48300625208405726878636239635693608760050808914770963199,

a[17,13]=-337069459361388689014803699015381713687690567244375400213684595734052625992754227352726656316209987117255095739884357921083132613907152896/63067199279135896643819570765928022420470350019714010284321869319114643348213021769674544089263425565075608163273196492141866835130335709,

a[17,14]=-4932805528768827057994088440893858561053518275789825439453125/95729301657690681696858943453282324869266878662175777535755516,

a[17,15]=0,

a[17,16]=0,

b[1]=741835872184249814298150212107/17748964952901425671330169232000,

b[2]=0,

b[3]=0,

b[4]=0,

b[5]=0,

b[6]=0,

b[7]=0,

b[8]=0,

b[9]=11624151101507969877872460040576307840028813793/2406192244049128529750055907864548318345864000,

b[10]=1339749300439942286956837017959403565359098038487639/2096157347835502898164390896147203483931151524600000,

b[11]=42515338584862572831054332658351938637328380382743931431/

174564878879285643463898546075168993436211520909013040000,

b[12]=-551377836097682926034050653128688/140623348636862692513530442141625,

b[13]=-2906946422359312554335209749637961828324122656275822794183836654284655506597261262427592760312017555071472053451806812335387772035369450624667270250496/13576776406709000866525243809446225565894390293015919107073827337422947011443213634814103357148306321701092924634194094015428719878481121294296948196875,

b[14]=1349958095957047305375830810577392578125/88541866235412876467660756513195150464,

b[15]=-4320857821028378829887134504367535201909/167589132467693196795734490917862221440,

b[16]=104472691411731952358126950361/8821812031038566316037102500,

b[17]=0,

b*[1]=67654905716802001605643112400686074479258707707594469325601/

1622496871101851666262616690659109163116255046216419306158000,

b*[2]=0,

b*[3]=0,

b*[4]=0,

b*[5]=0,

b*[6]=0,

b*[7]=0,

b*[8]=0,

b*[9]=57533738390980960970889643538541424827185082667114225294310900936867078027/

12938747489183323299223131126770619675977854908423979167185609091938223000,

b*[10]=275798543391938459414145937972261024383486208594002859832480694203713087051161287/

437982399501705940767355797832824635713940969532396395340223564783987340761200000,

b*[11]=523499152844465436446487969806835729334700002136861166163613451364513521590918180769/
2145560320291996908760974179012151750290489592674827402195747237780294891009612640000,
b*[12]=-51559927407172875755765922248223679419437578321260269824167456/
14691299707423353165787105742398364713835244675716118906876625,
b*[13]=-2846850851216944249628996410179116306159748617387965847817293200408204333235673324495876329407041384654
447620197097806771814593399389717578303366418755158778556943654101450230595584/14184023719041924311112763932159
38796299187243292624482283485665674816524225812951562553891517900648254238965253700350598194257060152443077443
648328919360467205527289296041580321875,
b*[14]=240147462252841222175983003631456732122446561088560526549515380859375/1850041413646227630233151479230822
3362345400902130345639453708235008,
b*[15]=-1361349839641258454364328288320378106756523554209472956145458166875/625303132866327840591822905922594585
19484962235801071378143106928,
b*[16]=10,
b*[17]=-405468365893962182536185969136353887138148561988142292823/
7373107568087971509554197519480430776712848362014152020000.

Version: 28 Dec 2012, Peter Stone