

Sharp's 17 stage combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

This scheme is based on a scheme by Philip W. Sharp.

See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{64}{845}, \quad c_3 = \frac{13472}{122583}, \quad c_4 = \frac{6736}{40861}, \quad c_5 = \frac{205}{567}, \quad c_6 = \frac{12}{29}, \quad c_7 = \frac{51}{475}, \quad c_8 = \frac{934164472}{1357047785},$$

$$c_9 = \frac{232}{305}, \quad c_{10} = \frac{208}{343}, \quad c_{11} = \frac{32}{209}, \quad c_{12} = \frac{5}{6}, \quad c_{13} = \frac{271885220833121}{469536848582114}, \quad c_{14} = \frac{255}{262}, \quad c_{15} = \frac{791}{800}, \quad c_{16} = 1.$$

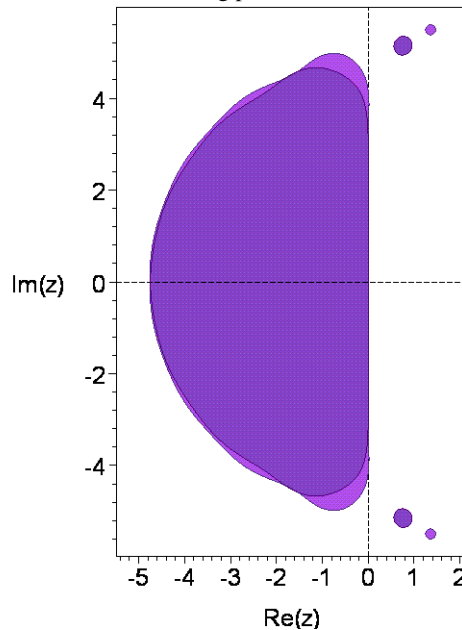
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.1015481860 \times 10^{(-6)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.5315906880 \times 10^{(-5)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 30.51699339.

The 2-norm of the linking coefficients is: 75.24832468.

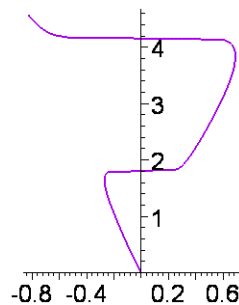
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-4.7582, 0]$ and $[-4.7426, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[1.8000, 4.1689]$ as well as at the origin.

The coefficients are as follows.

$c[2]=64/845,$
 $c[3]=13472/122583,$
 $c[4]=6736/40861,$
 $c[5]=205/567,$
 $c[6]=12/29,$
 $c[7]=51/475,$
 $c[8]=934164472/1357047785,$
 $c[9]=232/305,$
 $c[10]=208/343,$
 $c[11]=32/209,$
 $c[12]=5/6,$
 $c[13]=271885220833121/469536848582114,$
 $c[14]=255/262,$
 $c[15]=791/800,$
 $c[16]=1,$
 $c[17]=1,$

$a[2,1]=64/845,$
 $a[3,1]=453289016/15026591889,$
 $a[3,2]=1198149160/15026591889,$
 $a[4,1]=1684/40861,$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=5052/40861,$
 $a[5,1]=3968576377864165/16541821469892096,$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-4546306918227925/5513940489964032,$
 $a[5,4]=7825536739845325/8270910734946048,$
 $a[6,1]=7826943/145165010,$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=25175348361/111277538674,$
 $a[6,5]=104995735488/785682859165,$
 $a[7,1]=64011896977804359/1124735390500000000,$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=4534372108344453562880127/63582892584292865900000000,$
 $a[7,5]=-8254552379117813594847/163410092688872710937500,$
 $a[7,6]=211057188271020189/7116950356925000000,$
 $a[8,1]=-59740428995042632008811041675911170487363782058197/$
 $578188979431010867199088217452216431782879100000000,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=10106178391252425643277015033476169802332527008118964783153/$
 $10895282002356411505214230077919337059322340966753660000000,$
 $a[8,5]=-47376393483346358341845814872036540226561306413148385097/$
 $18667485015891280856157501947998830832769862254228125000,$
 $a[8,6]=8879534378322290800490527580067554941178292383545613/$
 $3658586987026647024250549413320975915632052235000000,$
 $a[8,7]=-1/40,$
 $a[9,1]=128247355912372/10487634911932725,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=195101631779131696816/582371663252977050075,$
 $a[9,7]=2530698583924093235200/10979935173559419040449,$
 $a[9,8]=45461021904849594240419468276/248514394189559613087298520705,$

a[10,1]=78663902912797568777840/7379291101184376846071607,
a[10,2]=0,
a[10,3]=0,
a[10,4]=0,
a[10,5]=0,
a[10,6]=9362203215770246821691660416/28747053239440813638427107531,
a[10,7]=1017385422097758491464340992000000/4347189202933780151480871420066363,
a[10,8]=32724381330219516221992803413127723871037108600/
687683117208041816168588261470665058848520182249,
a[10,9]=-10877967902046061224816200/942575910166619740079561619,
a[11,1]=2353876525608014166972623981712059/57797402643989191678501080078947712,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=-204064745823254460658259580722668751/182940719217081002754165057934838901528,
a[11,7]=4420393299464138808527716742580500000/38782111364758239989349185534661949629,
a[11,8]=22209574542502037236242723859590133053496026702744000725/
1795398206130645849762174551902546368833893489936493843328,
a[11,9]=-161198191265351761488155406284602475/31991316533456348846198172360844819584,
a[11,10]=-1/128,
a[12,1]=14950990498875586397339097787221850273/978821357952967212214412566010726400000,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=73416583085843255416838870727310789521223873/210675682663662387860709015453599850508800000,
a[12,7]=11864601995770100260393885067887312055/52543203914072359562587356993123278304,
a[12,8]=37246339869636711598256914209111939692466003881900689972460603/
372166535600823091580503146485422981543432587376692323241984000,
a[12,9]=926028615164194234128787746244734550576237/6631452233220851795279181505700097994752000,
a[12,10]=21/3125,
a[12,11]=-5/1872,
a[13,1]=1953764784951482015078676951423224934946163029530877756471410719501794143353038684186158366192928918897
872240638204883138206694619165361971/10920906372262299407959314284088580300993557236442431653600734387326400171
4408627521544442006312110143439234726041373149810175321001164800000,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,
a[13,6]=1041776915851155124716509748578010495591097597627313520924762095926929437143552971496577194316491202330
58537803720957018955256742355156262017497/345669247206533973083292592486519204886656844340905490234622364633084
430802786630740853666159986397508719091716619082075508826224127630131200000,
a[13,7]=1319695407228751895085148744302877134681767451516342374925060187814686080384795939647527112141944629379
98230122776317543600199272525851045/732793841519141755749886094238491727394830609088580912450226057448841139578
967047416302228943841725252498256055745528336624937515239599616,
a[13,8]=8582425186649647993778035508651882192732031380437503844179115956059894281477749203787183343201121649303
191408317924565432715427385168288359590928439364154321103/40709183762159106191573801991037015868973951658613591
0729514575688487030542244079715956903355339155889954819587617296454291677383130874766928878606409728262144000,

a[13,9]=-1019213636138611438897279688303958123441561623993259462115161483293079565239749074908010549968389320789
60099853604606425282808595782700452784721/146308520564324130905676779739014694104729283308352804198631701244596
56805933519297251658637892110373022778903933603375620562423997173386706944000,
a[13,10]=520458045357224543582550908969945335267406935257603992029961398082880225810059923622428274929115266498
8731026609/7136915514325212237396690245766161195011596971663137552050769453245792333133440415010824966039264446
45790515200000,

a[13,1]=200782161076323604768321418388589215426691725411014790366461465953417190718539777864661217878835193658
957/3538381514291131500940352129779951013887752588826543159172419163731181126987327920183849760059129621446656,

a[13,12]=9734856490741472984054539379206317483360843519276072033320438444332919773357721273599619283/
6336181768655669889733363422790059309575488467019251801288977918112620729104939747837874297905,
a[14,1]=-5678902144015943352293689636246069832907619301488239536520043077144602210708509227878776909/
31461590197929342013761920168700751323336116153169784765171412968297769627384441182617600000,
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=-2886700064114247713404395221765502928884799232022100522525251029836288459253907121/
2563865090865401367845633823419895656797935969772562375583854111343848565964800000,
a[14,7]=7116751581624269894116336175878747328459937213438524806326697760302109851315/
543520884271641795865136672116312037460773556745126259227009227677545777664,
a[14,8]=-176208112590681075410773678824741351269678219440654903773343055419739977165948469351162325230087017/
14849719138045385032076929701127731356992847760690168758771711690193911063301014288318619189248000,
a[14,9]=9616060276450162158745925003540303379330851995031141495167311007301255607084777709927465176797414489/
2359630146994548730765643607475433466030366724902988264633788989993041353151809428090900356005888000,
a[14,10]=-155683376106838674283390570875992466253574852137803830607497568404987/
8359011334327189621497576134422576518114451246136149870038220800000,
a[14,11]=-74107006783569375450793699553964678690271210915164362868989345/
83919843288604384581448029112379959731677709520403098813464576,
a[14,12]=-150328268119945808012729683673519708619639734355/
159436115535117974985535089829544602847166805276,
a[14,13]=508500097728906897977737108456131720002645749395395802058634600521809201334425884478821073175065362236
025/27438658054225690668577361313313046742145436147462688258074008036885935198714779435195153737839876884628,
a[15,1]=-1615092117715635960439445897320111318788743135595591011498948865250454297930323753287721818576157096371
3157/67360114736940571835162743773016311732874851734000030615639302934830152403986943933887283200000000000000
0,
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-2616521151692415853107103031668708536856417037475081875560120602874356289272717728207563/
157446430292359816243827627331597656459796898946591085185221128051752960000000000000000,
a[15,7]=1068323399851356634171635888976842543185057252880443943155083176422584012613949389/
6675501244024651648884037714059412983551014637975383227855485225926656000000000000,
a[15,8]=-455763816724016672323396064043173857556770224737601858879540053391920983430153133523175703641112361281
7/30397273728889389961811867023901058764229744485553073870951676225399238424303931681144832000000000000000,
a[15,9]=1396922766704431118907254073195853374886082070970356257247836962551105942876773888956595318804417579611
1458853836007/2754695744201656299686224750591713787442111651787088054803658315931613949951127624612263755037802
4960000000000000000,
a[15,10]=-220226234079477359736191208938814094513370249411788005256420741438968960366671189054487/
8998460021138262926839500825490452301633539160993575729722584937267200000000000000000,
a[15,11]=-23993145835822706365676676319170684976527359009679594344121795053246601291709407/
219754038656451908706211268384052288495157586220694389495254587801600000000000000,
a[15,12]=-22628129086272962465559998972164047321990508005426688053239983473/
19822391722539848631346227066153321492533593456640000000000000000,
a[15,13]=583396159680504930038066491462723225797411023367381580651146789909859604012503870557967347628698803929
77301751834264344457476564209903/238738537844906693236058624129631591760071706130813118463069141448033301217179
626955151896957523254230300583059185467392000000000000000,
a[15,14]=-145732138290806283058779365061390869989807749672418386953181/
13033079123714063087532130653978244303484747760000000000000000,

a[16,1]=-16573495781021674100556889845464343735734792026869659171585956044402490881334861460180885309501/
57356520219135446961887213809297644868451424685105055878601141403221831790777469813869772800000,
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=-88372521970681685518016441146862248529161153509909420674071234285087594752177156913/
41363649638334499459670854659753309546221659519456134985561414489378708071628800000,
a[16,7]=160706653873518506300512209087971624525882812904785947725076107752284764062195/
87687950150845949171604563618855404137943481190252964989759999582579391517184,
a[16,8]=-85410180247600924374373368993832718760340548667166612784179747039372600527725730693431495382572262487/
48713630958163403421922057599315749962402691781280645991852181390159512631276568995368100442669056000,
a[16,9]=3920826637573606890226913276406816286811690125148757731984745820270558030624710424076051467479355358193
922879/66242550751752192361625345271578801916230978195500874625506756455318419570474317882364813579843948222873
6000,
a[16,10]=-203339188835235770674842672450668703789559810491053443167895273825886172893277/
6887923520855406645162756291672624841645304858510610134357455369345433600000,
a[16,11]=-964331050811669885601786140930827470338389366442780845210690287190815/
771209929582045896610763089410645797032590097747711254810468896518144,
a[16,12]=-131309992575127188327101981819452770225137673726/99118069352131135759490365012315950204122976685,
a[16,13]=952578032858328649132769880107744815086031039976405503736439618923391150725134723211452554131600614625
90911655938468550154612974130/32249257436353252321510001758923817963848207265330413855458566553971344569726309
6489043581152495549450881373166169732653255819193,
a[16,14]=595947111296087185651316614941575740491758737166343574404/
60146604965860987154564947821160581512312900802147169308995,
a[16,15]=-74076382723258966913251674654882780220851486720000000000000/
30310859281414046713713145479164398248935724733149740968835083,
a[17,1]=-6456567757628289239544591025169129872493607262216523251105647869859207509047678744190230217/
19165678305868813607610132347523843162874924013356871942188221141226511226247050303897600000,
a[17,2]=0,
a[17,3]=0,
a[17,4]=0,
a[17,5]=0,
a[17,6]=-6882733318220481355780054751543883567202022265012636343304010726159905166555761/
3168048154398780218072212594562152026444031178729009390019281023564181913600000,
a[17,7]=7115278998828699840967974930761522185472454824335716702528415964194548231095/
3311004419972781607360649279365186748095898894124659358049280911113430116864,
a[17,8]=-207466911415048548825386239423104680799728275838728205377763020537272280674507871359214587265695131/
108198545583206363722763345191933151122331749570952227296864500493982968519870564600528827056128000,
a[17,9]=1340620555081406631176781481867611746865509757208358379311366935924943944679983920497672422794326557088
9/2247101590090294224147339621050016368943677389307973280750707874974152218599065655788629497971736576000,
a[17,10]=-678346281022711105530015894588658940494217374601965601255174398415692881/
22311119510196068048271429890593157906131222720229239617243073740800000,
a[17,11]=-972499091736905395782805019839516666142037918618694029138973755/
625256537604334511295105758828705802796729551684547078393868288,
a[17,12]=-11992570507349950329107182744832086658233902/10033763146146062948087343003606865009458245,
a[17,13]=709909189438137105305436472330744595135903869185251007415140821645766517131593304571189529369486986702
1964069818130/2326275004568786976424627327036022596399175428464995011002794609833294130600376081760057884460558
43373915099936793,
a[17,14]=-70808985464146286936451866647725476012212096973831196/
1401031648939136469887439103074811313871001523358761995,
a[17,15]=0,
a[17,16]=0,

b[1]=7612924977149419167127961561/177837300630446638170802176000,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=0,
b[7]=0,
b[8]=0,
b[9]=126142849986275233211545918501793424203125/27694664330581338584692741853442628507648,
b[10]=-42909342467153641027490135999643445774701737/6288868061677706010813685463652120764620800,
b[11]=168420221544879063822672174095810150391200087/669805766494297668164246418815572786626478080,
b[12]=-2948722999432869818797105896/695200715720883820604828375,
b[13]=117625283523798211564461899816175374921608059817155980800280036643500547589355491145609766251090644822080
1904765593986977350064/2053058172571714168263606950614056869666950432009008968418550770892078642701604361193034
13725741673397753835121365486727547585,
b[14]=45032797859314251334984452567815835674408/2548497570700238613899415492187454411625,
b[15]=-3403334637751267928685317980160000000000000/1134866911702156975741354334667371703616353,
b[16]=2862188138256916824337993/207332533052027740572075,
b[17]=0,

b*[1]=1020226850060704730878760945273292315480736868299613/
24238276781147318282917300801147357293593950660608000,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=0,
b*[7]=0,
b*[8]=0,
b*[9]=3998622642264636154871779798782768272416067547698573672358238390625/
1664614134539933706195967327802628086467728262540919782349886879744,
b*[10]=-10411291936503578554899107239728417432765008650789548745290249799849/
1999991507688522059365455109422524980423396014077488750437297561600,
b*[11]=162801954401580306213667589852809718192204735237722732892260673211397/
639036706598687000303918855697661230529739846402883785163153708564480,
b*[12]=-147567466816569063389361759079691380887042677115328872/
97499966869957594968216684803489892317040669090617375,
b*[13]=14220154869575043415586031490943301029849415719057201062871155214989637005357665604886691058355544080666
53087322932900505916349242241080456332662307632/307802982074038127422371993631001271171951614289961905682604210
008069712130351371351205974248922068100812050066351897875486726335940906277538778088855,
b*[14]=901372204859755385773861889557573924059123228649427039215036616/
810475501914976801907762671890138835878416338308933106438707625,
b*[15]=-164614183829464370918337054788628400490781081600000000000000/
30310859281414046713713145479164398248935724733149740968835083,
b*[16]=1/4,
b*[17]=-1214896260039840067951166547428747634532105400141/
2901187504239561542553842984594067602799444800100.