

Sharp's combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

This scheme is based on a scheme by Philip W. Sharp.

See: Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences, 4(2), 183-192 (2000),

"High order explicit Runge-Kutta pairs for ephemerides of the Solar System and the Moon".

The nodes are:

$$c_2 = \frac{1}{50}, c_3 = \frac{3837236}{48429375} + \frac{1031368\sqrt{6}}{145288125}, c_4 = \frac{1918618}{16143125} + \frac{515684\sqrt{6}}{48429375}, c_5 = \frac{14}{45}, c_6 = \frac{156}{625} + \frac{26\sqrt{6}}{625}, c_7 = \frac{156}{625} - \frac{26\sqrt{6}}{625},$$

$$c_8 = \frac{52}{125}, c_9 = \frac{39}{125}, c_{10} = \frac{21}{200}, c_{11} = \frac{280}{477}, c_{12} = \frac{3658227035053715}{5349704719299032}, c_{13} = \frac{247}{281}, c_{14} = \frac{229}{250}, c_{15} = 1, c_{16} = 1.$$

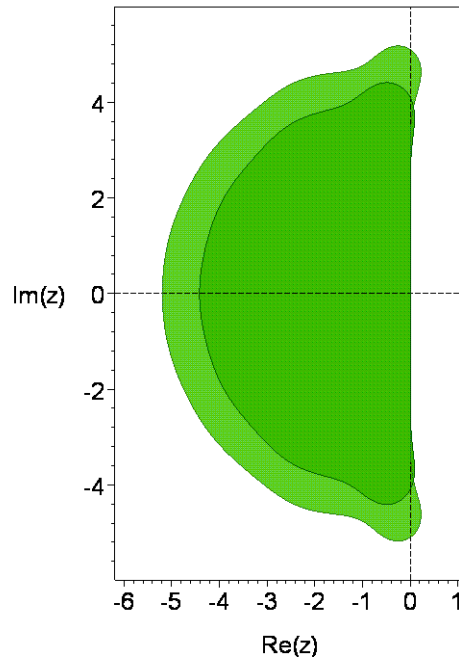
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.7461562456 \times 10^{(-6)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.1221554443 \times 10^{(-4)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 25.40256510.

The 2-norm of the linking coefficients is: 67.98851543.

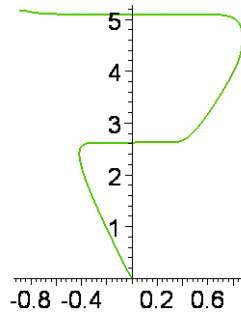
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-5.1917, 0]$ and $[-4.4142, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[2.6231, 5.0999]$.

Coefficients in exact form:

$c[2]=1/50,$
 $c[3]=3837236/48429375+1031368/145288125*6^{(1/2)},$
 $c[4]=1918618/16143125+515684/48429375*6^{(1/2)},$
 $c[5]=14/45,$
 $c[6]=156/625+26/625*6^{(1/2)},$
 $c[7]=156/625-26/625*6^{(1/2)},$
 $c[8]=52/125,$
 $c[9]=39/125,$
 $c[10]=21/200,$
 $c[11]=280/477,$
 $c[12]=3658227035053715/5349704719299032,$
 $c[13]=247/281,$
 $c[14]=229/250,$
 $c[15]=1,$
 $c[16]=1,$

$a[2,1]=1/50,$
 $a[3,1]=-24000387317036/281448523546875-5917264532296/281448523546875*6^{(1/2)},$
 $a[3,2]=46300580261936/281448523546875+7915204837696/281448523546875*6^{(1/2)},$
 $a[4,1]=959309/32286250+128921/48429375*6^{(1/2)},$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=2877927/32286250+128921/16143125*6^{(1/2)},$
 $a[5,1]=2826523628723851/5953434698904030-68459492317475/595343469890403*6^{(1/2)},$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-704240024458145/396895646593602+91277530807085/198447823296801*6^{(1/2)},$
 $a[5,4]=958925642225180/595343469890403-205373100103780/595343469890403*6^{(1/2)},$
 $a[6,1]=376341108/9406484375+207933466/65845390625*6^{(1/2)},$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=4343545768844529/27892881885795625+469265141246109/27892881885795625*6^{(1/2)},$
 $a[6,5]=1559927818449/28957835234375+4382126882523/202704846640625*6^{(1/2)},$
 $a[7,1]=11781705468/235162109375+2328587014/1646134765625*6^{(1/2)},$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=23459106068523828440829/354298872323611753203125+7870375504052283205581/354298872323611753203125*6^{(1/2)},$
 $a[7,5]=146263465360621089/7558718942052734375-1881455818308499953/52911032594369140625*6^{(1/2)},$
 $a[7,6]=9444124356888/82889304453125-2459298027368/82889304453125*6^{(1/2)},$
 $a[8,1]=52/1125,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=0,$
 $a[8,5]=0,$
 $a[8,6]=208/1125-13/1125*6^{(1/2)},$
 $a[8,7]=208/1125+13/1125*6^{(1/2)},$
 $a[9,1]=741/16000,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=2301/16000-897/32000*6^{(1/2)},$
 $a[9,7]=2301/16000+897/32000*6^{(1/2)},$
 $a[9,8]=-351/16000,$
 $a[10,1]=35291978967/748709478400,$
 $a[10,2]=0,$
 $a[10,3]=0,$
 $a[10,4]=0,$
 $a[10,5]=0,$

a[10,6]=23154511989/149741895680+39398793/1772093440*6^(1/2),
a[10,7]=23154511989/149741895680-39398793/1772093440*6^(1/2),
a[10,8]=-6251205429/149741895680,
a[10,9]=-981041103/4679434240,
a[11,1]=1601589807329134144752443/16639785968494158002257920,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=-1736562342312744743536201/1109319064566277200150528-
360257484908262597335743/511993414415204861607936*6^(1/2),
a[11,7]=-1736562342312744743536201/1109319064566277200150528+
360257484908262597335743/511993414415204861607936*6^(1/2),
a[11,8]=512032742176678555764127/369773021522092400050176,
a[11,9]=248233526294563631278471/103998662303088487514112,
a[11,10]=-3/20,
a[12,1]=-1319870176087866963572254233875946356127193892061286068806704341783213319696278890575414363556427430611
50672386594396559/318753926087995555015147926201612010240447228295789462486798116221476093939683123897279961564
118214685494052121351290880,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=
-58103861922516087620385683462945867512892670514346519245071644846616907579735917861602104529108097212142918854
3592047/1011917225676176365127453733973371461080784851732664960275549575306273314094232139356444322425772110112
679530543972352+
71348279807898814965088233729737906656351096659541311591981953238552744805776480028282602780942939988708855996
996031/51893191060316736673202755588378023645168453935008459501310234631090939184319596890074067816706262057060
488745844736*6^(1/2),
a[12,7]=
-58103861922516087620385683462945867512892670514346519245071644846616907579735917861602104529108097212142918854
3592047/1011917225676176365127453733973371461080784851732664960275549575306273314094232139356444322425772110112
679530543972352-
71348279807898814965088233729737906656351096659541311591981953238552744805776480028282602780942939988708855996
996031/51893191060316736673202755588378023645168453935008459501310234631090939184319596890074067816706262057060
488745844736*6^(1/2),
a[12,8]=-1893570082626077243216830863365173452283792508971032910490443505309352281806906637766578916136526650095
11679250229667441/104902085728430283184879370421906174798708029629619600881898639306750333561102065113284728091
47170874834777999725133824,
a[12,9]=-1618350992792815653992284152254111827399426534014847245801101845172567304269189800544372100050869595166
981551925667441/19637518660778297585754649024920739916598981028937029385347383945787366501641192454385997632075
140011874187139618963456,
a[12,10]=688343784271498275441415528353054302780001015660014706911988935077179143136643932965653687156537828208
9012991331513/1827181489551794784669860898707808352423218653885642080180242252960011545073999200946066370836641
132319880849653760,
a[12,11]=115590271440716912566235566233889746097162479804636463234298604185457969653794053637008425503953091180
886565/31536133324907183633041146487924575416396446865696376728407872600463097501592169752587041452634759693677
3632,
a[13,1]=5215174783558918407997583468635543407988332719241764605769949554629/
20283132613214812064685094275151111714651171227532533713038580121600,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,

a[13,6]=2843598186227456480865065344408178581293412110128603/
792075053175002139265844335272820716293355019960320
-18227070890226867447840942666790512323422585544257/
121857700488461867579360666965049340968208464609280*6^(1/2),
a[13,7]=2843598186227456480865065344408178581293412110128603/
792075053175002139265844335272820716293355019960320+
18227070890226867447840942666790512323422585544257/
121857700488461867579360666965049340968208464609280*6^(1/2),
a[13,8]=9326829464422062118248457481351539504275339476759467047326605595685633/
4901901791858228863857691041029309678010355547895721285919177263022080,
a[13,9]=-741604155090542466856213236072374206251235617068304762316465738169791/
141551673163321136844445993892555326037025917405403892742525852712960,
a[13,10]=-6058504866441219655595548618762485399974773685307046001179355536003/
2252275720815396172726400694965157641073696835574259179818290290400,
a[13,11]=-72917047186465183128180555150230405657138451692847535142343993/
44661747288016218276854771442831738093234145203222656783563600,
a[13,12]=273615392054092764377413314763529648694666091555825328598374202048888729684924117315196064776345323955
1016003889152/2485672110698341015290264470463939203955869249618375406787169018009688457749866177826801192710345
262847046284166825,
a[14,1]=1961431625890315687063141575818232405522545898155499982338718373117379429883/
48005664716707742999059356805540609358617631866994442267348172800000000000,
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=-8688525606146315530022414580346392155721271039/
22386738118754433181814607602481176248320000000-
10256190098435854298655077997613296122112139953/
1148037852243817086246902953973393653760000000*6^(1/2),
a[14,7]=-8688525606146315530022414580346392155721271039/
22386738118754433181814607602481176248320000000+
10256190098435854298655077997613296122112139953/
1148037852243817086246902953973393653760000000*6^(1/2),
a[14,8]=-108151392092290424953498836380059772609736403739434481043071361807712075869481/
8600735495194563448316261478331353993230137106756553600705167485829120000000,
a[14,9]=683210554257935462600257975958139742203919396113084127371502375524416129719/
26895337200565243662247103690698994332502640106760065066162305761280000000,
a[14,10]=-125971034051203704183074450363446847441594334546885083244594242327104115033/
5066049934698363488698655054901069679084758735799331062593807151200000000,
a[14,11]=4322338495495152743252505005837177994220267688026960252214552638944423/
236867625787508422152958167179676757535142999000924357630500000000000,
a[14,12]=-886824143941836194254416478662433881129172892391614639409444929304921125471716523632401461235899088705
67811533658125375935101390832/940510477623017606720238368944449968423863982309765008995433338337795877049199907
6242219980453370248022825420814384818872314453125,
a[14,13]=26235475641986625187247554297838197168935151270802587/
31781620957198174033817415268740604591106877500000000,
a[15,1]=-293368876868553737193922190442902414638569907165819426999847151894747/
1423967854813137802350516795065201258930107696470226170813903745843200,
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-279050827135618188106138704976571118076242172562777/
26980717750745660055932121988692169249262917386240+
59017804198407615229179283246229064921710388893173/
17987145167163773370621414659128112832841944924160*6^(1/2),

a[15,7]=-279050827135618188106138704976571118076242172562777/
26980717750745660055932121988692169249262917386240-
59017804198407615229179283246229064921710388893173/
1798714516716377370621414659128112832841944924160*6^(1/2),
a[15,8]=68240477823918559060550996013166770535743446467404475965020846786328901/
69628625900822775316247857716283393138506964199995817446989013471723520,
a[15,9]=48531604865335743440838806675493568975092395234916265724406574203650554879/
7529075569049450724715447951105730327391304314424323559158913160761835520,
a[15,10]=7315898198049114373691779027237206235234893868747090317226910860963581499/
432400219379131684183655517400956805867024783959757582533074834771793600,
a[15,11]=-87035912584683752124645187592152267644073875904388006117245587111831/
41468532532723053663401983927439573730970639521941633396843682248800,
a[15,12]=793006054328041651061360131256412474400253089909554005378332728214806108995212138291759017448087224471
716436232175864384424753159293287828190208/60063530550704843017053132317400791581344649985334818630144453572293
2552444071789775577508083955280258070844780520371987041149053341617704219325,
a[15,13]=19013238692887784267164981427867630356262081870600946422701364458/
146516308633144198110735805762400905606463733191840985648075179899,
a[15,14]=3681765455065755963420072411132588632986100960875000000/
7515329389098801941975451526298754679007062667248055263091,
a[16,1]=-36388658330162124762200023703074655379362961851837455245313588466117/
299291302137383314536268908335335078201218487321808786511993451315200,
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=-5017294099975580158862668031284197043053591531405121/
432874134925719951608236287739966681862399087083520-
115700422823857939498444446575144266776173664871303/
199788062273409208434570594341523083936491886346240*6^(1/2),
a[16,7]=-5017294099975580158862668031284197043053591531405121/
432874134925719951608236287739966681862399087083520+
115700422823857939498444446575144266776173664871303/
199788062273409208434570594341523083936491886346240*6^(1/2),
a[16,8]=-91869384706617020415871523809581333688744319256441669606452442156503951243/
10053990532496870785611049673131231012151168225596329651077879646797168640,
a[16,9]=52862999381403119807509472978743982056878734540171187101666495333163485251/
2399905281474961058988767393522446655063434938667458594324573249770618880,
a[16,10]=11964965861294434337427534231330501089458731146841410298258149571218167/
1974017923973741961134058915802491373563600428420464580517659076868800,
a[16,11]=37167680872257703003686692191635149388479305578570534942584948859/
3913390524272247558198063815920084715858046504866006220243936800,
a[16,12]=-294439558670543477533410261210455895789781854602203694276656344281747917882801172235316902171950512508
54008448256016995751289856/613836440653194383209173469818173591961818242299772672817363925583944292393972745471
1783369110119257425239678616468261908910975,
a[16,13]=407816748385172686498153181346812432791118177175769818363629863/
626162397882386095196201629768303759628250075752997120162580989,
a[16,14]=0,
a[16,15]=0,

b[1]=30703843389361946002220520407/1036329015084155723633962896000,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=0,
b[7]=0,
b[8]=1516681888913470906364013671875/19423768214582439936604117641536,
b[9]=1929922737998470573359614532470703125/9295447834009061726737853188569292704,

a[5,4]=.7657198963840296158771702472480223607446343024013571126330017454650271833381275040486,
a[6,1]=.4774394408338062325001887145293549434009518435637512592892564244273446867585300744842e-1,
a[6,2]=0.,
a[6,3]=0.,
a[6,4]=.1969321757953548266501794764886697901686568926038872375466777706840757282203638103450,
a[6,5]=.1068226534210447589848086695661597973970313382350551138671965976708297548060074873107,
a[7,1]=.5356535207401003021211033327751885871031768321818693030408312204323256409505165243910e-1,
a[7,2]=0.,
a[7,3]=0.,
a[7,4]=.1206255889477289190562442468993166757980382853917447443318263910174155903968501774024,
a[7,5]=-.6775075622514970108067351858385760616391783769386667369893259908549518351241909044865e-1,
a[7,6]=.4126104190363054292731192089925698974977845388861752172022307522720707731829295550313e-1,
a[8,1]=.46222e-1,
a[8,2]=0.,
a[8,3]=0.,
a[8,4]=0.,
a[8,5]=0.,
a[8,6]=.1565836740833943864208313840256208105817268291124118118492222192228777911938265819155,
a[8,7]=.213194103694383391356946393752156967196050948665365965928555585548999865839511958622,
a[9,1]=.463125e-1,
a[9,2]=0.,
a[9,3]=0.,
a[9,4]=0.,
a[9,5]=0.,
a[9,6]=.7515024064760903893490738078090048191895453468284271546237108647424651691939963816230e-1,
a[9,7]=.2124747593523909610650926192190995180810454653171572845376289135257534830806003618377,
a[9,8]=-.219375e-1,
a[10,1]=.4713708051675708557451594832113721508350547950001750638983228878540667343580406848500e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.2090887671772457006190027123718300374955579382472646045762919469484884352730487716510,
a[10,7]=.1001701998453360720014412496743168061023553000847265722032325795036666013153059778326,
a[10,8]=-.4174653593513261979294317425860439060256993802737999369769966037603725359756311053535e-1,
a[10,9]=-.2096495116042062384020167361086796680788487798046286894716571548615244564265957074332,
a[11,1]=.9625062548049543085017919784561840132953375302911357489046390614125848797410275230201e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=-3.288982394048343667658622555505918341339900489989951308273317224706241971936880108572,
a[11,7]=.1581205928194829399804729418028250823609903313567731857434851066188756168309101132840,
a[11,8]=1.384721741107569496119668464190842623126332496849297840103837086003797659792548091434,
a[11,9]=2.386891531076854500917945557536653198883630910851202766235740769548180228303679738554,
a[11,10]=-.15,
a[12,1]=-.4140718178082933382695133867792383028295778855031601575749012346940306779592304164582,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=2.793623292855763666388846981340005093927136756870031898938450380964784816189205577950,
a[12,7]=-3.942014889484437021421838210663518828459190315860502097061143308976520439896828543282,
a[12,8]=-1.805083349370323277821865562353666417873671720284485001422609472983360160190648473825,
a[12,9]=-8.241117529910345787128019794562500073269019581756565806827362107950212420374516357919e-1,
a[12,10]=3.767243638399314673751438233900802710583605953264282595187703770582504064546920008550,
a[12,11]=.3665327966806378124412220262925976680187005548699655987896271555118710047482520899450,
a[13,1]=.2571188032444821538476264628078566817307801847863454383933729064850581633653160118945,

a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=3.223674985444156900284145632871983075517795839587138359910938940646956054637078338519,
a[13,7]=3.956448097157683435776457321881030936513249235674813768176107947436311321191650428710,
a[13,8]=1.902696108664065521798057311062679381944699314123292366678805031433303112525325898860,
a[13,9]=-5.239105540171791498270182426182872183952701578610364142759727388646779492071349623587,
a[13,10]=-2.689948131327298704120797334842045766357444468476740301955899039037397552857497375015,
a[13,11]=-1.632651018246895068543861993636878184886127214033324160713049735363284942715867484116,
a[13,12]=1.100770253954458469192967837426146415361634807945279953408241372633021948024987932849,
a[14,1]=4.085833697887876747701968216412468343536086959491145998770744753059786512352854691241,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=-22.27104081270551136826712664267533719550877874220650944003368468162063012374083698298,
a[14,7]=21.49482003770412559688737439621353045205310066902588055914953192341076763370739347642,
a[14,8]=-12.57466784703670906411798153305987130700986347898002406029580526651361591504313873458,
a[14,9]=25.40256510498692775898138517701350457008617977743413293745842426153335760622691177798,
a[14,10]=-24.86573083072149317095343148611742107894135114901181040269062760426354345844698903224,
a[14,11]=18.24790737495160851471802020690975199783789183979705434431818922332526049873047018450,
a[14,12]=-9.429178781539312448012515871501653869513857345052334512798655378914928785933796025462,
a[14,13]=.8254920564724874330623075368050280874605914695024645761218827699835460321471306451213,
a[15,1]=-2.060221204270465219924480791228458939514798817328920490424392562074146739045314950297,
a[15,2]=0.,
a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=-2.305556459687617832619892967749817579262426333001101757731203223142173776703055969228,
a[15,7]=-18.37964767117032592030693622330048831544394007651254275093903259166602067222110655366,
a[15,8]=.9800635434213299183988279058761505696853533841143419040486815955915150454104410128880,
a[15,9]=6.445891586589943208264898392076498334915209032160827152694695977551567376186230743507,
a[15,10]=16.91927494522032415655199190503713912139144481192194628296204574787586783781976826179,
a[15,11]=-2.098842357539496268112673571816238105118588541214735171815620290694158752958315180213,
a[15,12]=1.320278789903294750969468547889164811570844511693818437918728140068971805011110284261,
a[15,13]=.1297687531870203219339857256048630663338715472419930024513388346781146391009873888850,
a[15,14]=.4899007434599288484481107761118703544303048092437339083475837181046323739925496206588e-1,
a[16,1]=-1215827458743143966929110355671507307857133112188725033240331995907108871119034278257,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=-13.00919168721208795393748955400160450641912673940593739561610969749650645073988287166,
a[16,7]=-10.17211528016555155563144422404708873788742144946788515961041390171057757172715557704,
a[16,8]=-9.137604059768455320850072839729326992033837734500900754998877294941723879220810499039,
a[16,9]=22.02711906567994922863060098343370997186337503735703455668191748806698110725754432957,
a[16,10]=6.061224528908375913350017689458924622997661581851320023398838045594307637238504368011,
a[16,11]=9.497564999386198269379875528150889093381193068468995515333542130358881565202709405732,
a[16,12]=-4.796710315165144870817258298920388057945063505504350369052050545781779504551459131174,
a[16,13]=.6512954942110306865686817512220353368289330524205960871871869755011279836524534034237,
a[16,14]=0.,
a[16,15]=0.,

b[1]=.2962750530232777652571471592713919839630184016253977691095810656061461931953675736557e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,

b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,
b[8]=.7808381320030468600575427183197351631123893968343140552777376017818524127783159934131e-1,
b[9]=.2076201999582529393862805046585449945984657553075303739690215876339562730264551329332,
b[10]=.169689395533794848088161847963068489566652421567777963512827999725833667563935554653,
b[11]=.1517056142348151458440376462072813508141284825493994735564490260040531837748444895381,
b[12]=.1442459482851157016412510533496848080913933273689728240142352328321915108491373893250,
b[13]=.1667615302189055804840766344508112271100905757047920453351488716512562331347799664404,
b[14]=.1925342856212435947621301975693996946446100123652982084755439831023902006798113698802e-1,
b[15]=.3301256470435896254851030585455644564726765641902648348757621685692055179303997260308e-1,
b[16]=0.,

b*[1]=.2986030773272718665434553748999942742255850569216375206529302666732331659016029532182e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=.6577559759111822245118421251609878047651919416843136179332815533335699536810295658460e-1,
b*[9]=.2139567796581191408980298910222656457287166988078570920337946935927490284946915871146,
b*[10]=.1687215787969928693899073409995740962532532038668621510795857935459303772442675742190,
b*[11]=.1717683607367864581772934857950018324529795704775076717723444730841052103670661496090,
b*[12]=.1254926807906624767986765544830562765080518617579382325652440014244758530443870701158,
b*[13]=.1892636524172351440132175023953094199835572398737303173059449664587217983941267400779,
b*[14]=0.,
b*[15]=0.,
b*[16]=.3516104227635850161734547529869452117436372535550942138446488989333742049719762695718e-1.