

Verner's "most efficient" combined order 9 and 8 Runge-Kutta scheme

The following scheme comes from Jim Verner's website: <http://www.math.sfu.ca/~jverner/>.

See: J.H. Verner, SIAM Journal of Numerical Analysis 1978, 772-790, "Explicit Runge-Kutta methods with estimates of the Local Truncation Error."

The nodes are:

$$c_2 = \frac{1731}{50000}, c_3 = \frac{7630049}{53810000} - \frac{983539\sqrt{6}}{53810000}, c_4 = \frac{22890147}{107620000} - \frac{2950617\sqrt{6}}{107620000}, c_5 = \frac{561}{1000}, c_6 = \frac{387}{1000} - \frac{129\sqrt{6}}{2000}, c_7 = \frac{387}{1000} + \frac{129\sqrt{6}}{2000},$$

$$c_8 = \frac{129}{200}, c_9 = \frac{387}{800}, c_{10} = \frac{6757}{100000}, c_{11} = \frac{1}{4}, c_{12} = \frac{1427971650951258372}{2166662646162554701}, c_{13} = \frac{4103}{5000}, c_{14} = \frac{2253}{2500}, c_{15} = 1, c_{16} = 1.$$

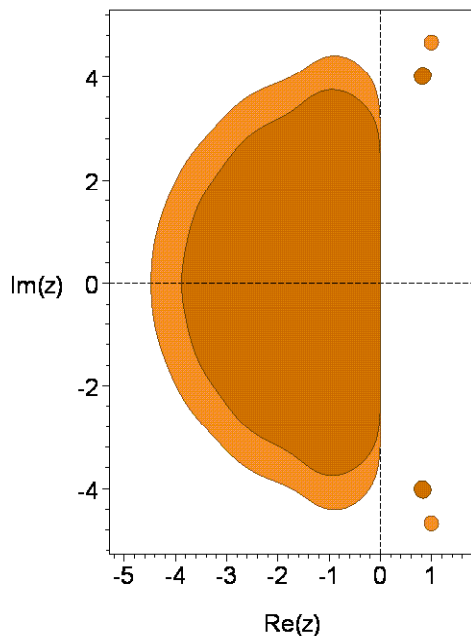
The principal error norm of the order 9 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.3490527050 \times 10^{(-6)}$.

The 2-norm of the order 8 embedded scheme is: $0.4246108070 \times 10^{(-5)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 35.89110098.

The 2-norm of the linking coefficients is: 66.81402021.

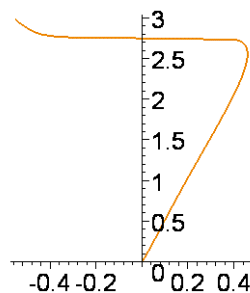
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 9 and 8 schemes are respectively $[-4.5214, 0]$ and $[-3.8794, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 9 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region of the order 9 scheme intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 2.7570]$.

Coefficients in exact form:

$c[2]=1731/50000,$
 $c[3]=7630049/53810000-983539/53810000*6^{(1/2)},$
 $c[4]=22890147/107620000-2950617/107620000*6^{(1/2)},$
 $c[5]=561/1000,$
 $c[6]=387/1000-129/2000*6^{(1/2)},$
 $c[7]=387/1000+129/2000*6^{(1/2)},$
 $c[8]=129/200,$
 $c[9]=387/800,$
 $c[10]=6757/100000,$
 $c[11]=1/4,$
 $c[12]=1427971650951258372/2166662646162554701,$
 $c[13]=4103/5000,$
 $c[14]=2253/2500,$
 $c[15]=1,$
 $c[16]=1,$

$a[2,1]=1731/50000,$
 $a[3,1]=-177968356965557/1002427673820000+14180534491313/250606918455000*6^{(1/2)},$
 $a[3,2]=64021741529527/200485534764000-7504450763411/100242767382000*6^{(1/2)},$
 $a[4,1]=22890147/430480000-2950617/430480000*6^{(1/2)},$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=68670441/430480000-8851851/430480000*6^{(1/2)},$
 $a[5,1]=592203994261020339/513126355505556250+730386990293623641/205250542202225000*6^{(1/2)},$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-8712153884182794903/205250542202225000-2843421359195851533/205250542202225000*6^{(1/2)},$
 $a[5,4]=1873698362223295443/513126355505556250+52825859225556973/513126355505556250*6^{(1/2)},$
 $a[6,1]=11380823631/157617812000-339148869/39404453000*6^{(1/2)},$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=16193232887091831/58864341808507450-2355345717024309/58864341808507450*6^{(1/2)},$
 $a[6,5]=165912282616977/4179075230308000-33181894472511/2089537615154000*6^{(1/2)},$
 $a[7,1]=26523528363/231790900000+863255358/123138915625*6^{(1/2)},$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=-38208748178016484817787/842517966262441068418750-$
 $86118788556282369822807/842517966262441068418750*6^{(1/2)},$
 $a[7,5]=92362336407446913/290322814529044000-232039320950012997/2467743923496874000*6^{(1/2)},$
 $a[7,6]=-362925891/1690350537500+857800423623/3380701075000*6^{(1/2)},$
 $a[8,1]=43/600,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=0,$
 $a[8,5]=0,$
 $a[8,6]=43/150+43/2400*6^{(1/2)},$
 $a[8,7]=43/150-43/2400*6^{(1/2)},$
 $a[9,1]=7353/102400,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=0,$
 $a[9,5]=0,$
 $a[9,6]=22833/102400+8901/204800*6^{(1/2)},$
 $a[9,7]=22833/102400-8901/204800*6^{(1/2)},$
 $a[9,8]=-3483/102400,$
 $a[10,1]=376708742472214988700853/7788456028125000000000000,$
 $a[10,2]=0,$
 $a[10,3]=0,$
 $a[10,4]=0,$

a[10,5]=0,
a[10,6]=187914666753956840195279/2596152009375000000000000-
210440846556290693268911/1557691205625000000000000*6^(1/2),
a[10,7]=187914666753956840195279/2596152009375000000000000+
210440846556290693268911/1557691205625000000000000*6^(1/2),
a[10,8]=-18552667221896744226647/865384003125000000000000,
a[10,9]=-3167799860072183913409/30423656359863281250000,
a[11,1]=-426968570497/54394415898750-92754382349/12087647977500*6^(1/2),
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=0,
a[11,5]=0,
a[11,6]=1/30,
a[11,7]=-2865012129681958/114898584332330625-12962517687655099/229797168664661250*6^(1/2),
a[11,8]=4389715333607/309890657317500+92754382349/11477431752500*6^(1/2),
a[11,9]=4990058173976/83757096376875+371017529396/9306344041875*6^(1/2),
a[11,10]=1099523524595993125000/6257667909869756018891+
100957348037989687500/6257667909869756018891*6^(1/2),
a[12,1]=
18382031104798403869938539009154656587521498573595595063164077882800315372787284683238439478955141517997198007
108623761931447163756/13974256944499724344918960993890933614161025322970450047932688998095008528620821239604734
608111291769444706187497807869179550841329375+
40788577818515860921079389251758259530589647075646761263679625961149140826089641344688345089135162291481880069
3274034252252905536/2808492638860122607362409616917500295697019157645511063322676514116137229409869327511718123
9385312198137508846535933127837167926875*6^(1/2),
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=0,
a[12,5]=0,
a[12,6]=
-33388131178984941197157347286812828143820221072172312325174214536773458288757739554777822876017406875808613438
9952015563403904/2270872004608103037127689848604039623086639035441372934050180593816493796129405349914148981460
714202232988727738778494557727635+
4819272892477681713733086667206891214210919536257929702780440715499506401950564729555237698290348006218904248
4700913000000/231628944470026509787024364557612041554837181615020039273118420569282367205199345691243196108992
84862776485022935540644488821877*6^(1/2),
a[12,7]=
-13666660749646362227013560886377207644362546879813948039042674099302480394698176320934836471610872131282261984
5726151693667598437699964416/3719286465342404274788585327254180828195282427342057650194855634917821113563432870
681372043512520401887141437067106105683944802332422369375+
16984508556536133680555600929639437452763695237938896102606662872515552183276208687563236699647756792865753591
2191396155566765457826139904/1593979913718173260623679425966077497797978183146596135797795272107637620098614087
434873732933937315094489187314474045293119200999609586875*6^(1/2),
a[12,8]=5610987899273278525411960528081442902198567594809764379756195673673265700551076812883925583370253765702
553235594764427173637673766208/92881598198144033018278804740626334135423356791639598109358867770361609232846012
626732332450844264293840456574956036349633197336361875-
55874764134953234138464916783230492507657050788557207210520035563218001131629645677655267245390633276002575437
43479921263738432/365303089362201664516413596925286161494473575337115296250511752859728108868696929614024803255
122785403232359817965288739565550625*6^(1/2),
a[12,9]=
54598539818083615233566148602203244896696958910734339754065270985433507945162707737759469214674480807272210648
148477499238783276259328/30124791909229885263488687512995931079466293201418449982714507585163729869831207403056
7479239502011693447423026416040794479934024058125-
65261724509625377473727022802813215248943435321034818021887401537838625321743426151501352142616259666371008110
92384548036046488576/864909328430372818360283879213205026685796531766248922845664874681703412857628693742657132
47057712228954184044334206372230816544375*6^(1/2),

a[12,10]=
93916673484045840109554222103287071250061206616110619088897508056194187858209480024558903609392219121905247310
87070645107486913457760000000/581572669687730206124190285037387083035152858549707256623268015312953872657848498
43172223645193277229358434488742203091272981931739152584783-
8108825145085088104344721048166325225173729495689364696426720161120124142277523289697206589873156541798737603
5772523573400039944000000/265558296661064021061274102756797754810572081529546692522040189640618206693081506133
206500662983001047298787619827411375675716583283801757*6^(1/2),
a[12,11]=
12346171265988791517727133939660686081047902877786934801487045060626091401956028566128821249812840047601569596
0341952/
28162910667032067475424520935884070370423514730783889674107551122082605682904720561432497825322617627507892271
6132461,
a[13,1]=-56042772675322042139227629978042586330633622706053363946766144416933631/
58808540772323190525590122613223430507352118534557342666015625000000000+
281404579734699232141455524604487724159024972527/
1478009944832743180452316204077188415527343750000*6^(1/2),
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=0,
a[13,5]=0,
a[13,6]=-1027163900229750356561238237947225332675621517/179261894431132664078747698292867431640625000-
2745292391641202525373103979336813513372321/11702216468464340311060649744558385937500000*6^(1/2),
a[13,7]=-157229999853748227305165773364426925282378072238332930121/
36699907367985458573273204094330716033963413238525390625+
5757606442802795095318986067317837904184278650664590252101/
3523191107326604023034227593055748739260487670898437500000*6^(1/2),
a[13,8]=-9311448168593934146015965019904013602133802943325818346622781285907057/
4255970849010124217193135449668739985401313363005576159362792968750000-
844213739204097696424366573813463172477074917581/
4210188359946578336976868164966163024902343750000*6^(1/2),
a[13,9]=885774233856672590222951867695327816457340130391639153070521335485617578/
301098541380295011015469248465465290112505656143757799934635162353515625-
281404579734699232141455524604487724159024972527/
284481916364737983221402322504830303192138671875*6^(1/2),
a[13,10]=315479116729780153956412124052199685097744239386639023787359107959254802182/
134481850506505848012587842215515574380212543200894932329128471154748828125-
294039645364787227664606877659229229737651937934623/
7345465058781983710795837429530784777245286520703125*6^(1/2),
a[13,11]=2250996163406545378616532039018846586217631599453822541/
382491303797095993563304148204275636433504028320312500,
a[13,12]=
26893409573076918532949023883344540039593781469575298662335292519863593923360441517089497209588097479705143662
93458424272174024493/
95951638601957880850056911478087170846689475228048283510540802781519489531905544384278222710212049396080564957
5561796875000000000,
a[14,1]=47342003848024391498707976847688893013083074441159779465719863625051668939887702630319/
44802546873926050730401222636656855760802419993852060264615320801485392456054687500000-
866369530987077991125562402829092187100493209601/
3325522375873672156017711459173673934936523437500*6^(1/2),
a[14,2]=0,
a[14,3]=0,
a[14,4]=0,
a[14,5]=0,
a[14,6]=871779321807802447463310035318238762878527157/
134446420823349498059060773719650573730468750+
107641268480999396081848975271849857994818/
1097082793918531904161935913552348681640625*6^(1/2),

a[14,7]=496103786351862292800034805114190705484800743513354117014/
110099722103956375719819612282992148101890239715576171875-
1329938412606197485769312599390307351191540891599374831099/
660598332623738254318917673697952888611341438293457031250*6^(1/2),
a[14,8]=40774077277747636354598451708891165494123131383777235229538611989392175193285994266471/
15264290546248162101058985941588079518256741255377031736357946125713524703979492187500+
123767075855296855875080343261298883871499029943/
451091609994276250390378731960660324096679687500*6^(1/2),
a[14,9]=-10522038608500556459828649038302068473735749030796372764961618751973793724796364606986664/
3899417425005422254034574000397382862235892829653375835197340918271556055507659912109375+
3465478123948311964502249611316368748401972838404/
2560337247282641848992620902543472728729248046875*6^(1/2),
a[14,10]=-27843764471262693189365201135620670490328475323282820219474851621693895769527094334687108984/
12257041066285164222002594300605593929434139193022166317802121412999357024704596261133984375+
574774300271998598683873114105472016699241495055292/
1049352151254569101542262489932969253892183788671875*6^(1/2),
a[14,11]=-34241134351848245624232809437676889009431930503529853032576417589898516/
5613347824358651981100985009024281007603230062439942682713165283203125,
a[14,12]=
-34320443758939323781023685680522865010338509105169992020885327052116334327939205477028009615324380084018837373
41854688972639605334600163938610268855705742764072609/
11431741063416822609716476904105672921439261986509277789208232674611113712759075998017148701658133941475190682
10931766844494994616580258435518181434575195312500000,
a[14,13]=4746930876023919335079451612726717649218264199984/
18592065538407049755200144388134089346432755594877,
a[15,1]=-25188329249258825443748527038142409879923012133738985313265430932280250855708601/
11370641325574469312056961874077298550827642308774647316995717036347558064286250+
1234273058981860170179592598535508631343082535549881956/
2105633771469628744518390642968552144069898845895808125*6^(1/2),
a[15,2]=0,
a[15,3]=0,
a[15,4]=0,
a[15,5]=0,
a[15,6]=-54821142119685055562477216205428613949905430396088/
3959439837009461289085587746748097947393101278095-
1511276753825982856072891469504471256664975925000/
40386286337496505148672995016830599063409633036569*6^(1/2),
a[15,7]=-60922424274061599918603524049390657305431262635197540405697952/
6484861747489032169774584624759953148531564032417461909516875+
84558575751635978733109961893984238786929550462615375699341616/
19454585242467096509323753874279859445594692097252385728550625*6^(1/2),
a[15,8]=-116118147575045169733222875835719955334334798191459879782123534889390467935109772/
8810626901954835245672275131295870892503713957512170681453300814988417642493125-
176324722711694310025656085505072661620440362221411708/
285619406719829107485771207042040133465420149964555625*6^(1/2),
a[15,9]=17769448722513898342276837490665097286927607247073335618566987143467294900183033216/
2551217008137889615056342146084561867122485163596619283719957742418751029506356875-
19748368943709762722873481576568138101489320568798111296/
6484554262322259071286545935997129135111813687175650625*6^(1/2),
a[15,10]=97659266139124074818193264801929547781659926543786381510190954184218570746215033823993530000000/
18560076654469706205963482908787056850812308205603127326855360961727608242796551101182080033599-
85297084611782122474911131363078900058888025224607913745000000/
69210659450201393843166746722954036326338355649915383851733911*6^(1/2),
a[15,11]=473389749049752963256114649231353822492912259509649519870869750525/
35412440882360341799798842428365422941216508121322622479260846291,

a[15,12]=
33351439245158438248073494056784144097872912773415904536400728387690334563968394114702414108807505158106385116
46873285345820289966748488718531545706559142895903144848764637/
23166110253272874277148020113222528860907939049899006215923656276490975781021635721905022324254906067733123106
65593424982745744299371285598588298606088543376742054644818966,
a[15,13]=-38714992656958413389743252726016897599283911682945255636643554687500000/
48540494926971587499294589382572212036169135429877901702347521300421767,
a[15,14]=14800250200940323717124616175641261235119295795768814717803955078125/
33565577125141877760287380588632421223433194078156948298488471160489,
a[16,1]=2305785696086397561080858186939897173645641331085041313944389849986584101287/
617508244345282265819087370078275122671246164669900462139876057008239440000-
85404623305589712632165905233974183137607899140719/
124822287169084833758410283469525117460541643292500*6^(1/2),
a[16,2]=0,
a[16,3]=0,
a[16,4]=0,
a[16,5]=0,
a[16,6]=102903996961580448264190625267026062654799259083/
5046398084890004857481629999673320438819484730+
41320925487304219313300272052128374567081128125/
51473260465878049546312625996667868475958744246*6^(1/2),
a[16,7]=62798443349876457506718920843975661399949564598018488144466/
4132553498782573324058263582553715220777051359780141380625-
72308807081932961554425711089716771013571419950657300729103/
12397660496347719972174790747661145662331154079340424141875*6^(1/2),
a[16,8]=179490914212648256439084852292422553221469019751470544959297614654661293377/
52596481193994264435601626109752988674679691644275456716633975785978672500+
12200660472227101804595129319139169019658271305817/
16931561456559959115207709344056578263397760602500*6^(1/2),
a[16,9]=-2775244732780109667342845612394739319115662636371477300455747022423270475907256/
228417153675584029725018045422706955827996328208181619436454383447149337555625+
341618493222358850528663620935896732550431596562876/
96101338378773357469245211954911505447551097205625*6^(1/2),
a[16,10]=-27680554659769016623530979176727448251292244310769996015342190819068970556083063125000/
3299557777429648960576561382256606844677258438797072955341581354051375036522231471437+
4426552127579895373479670356100179759944766558141730312500/
3077113738667320707748877199804636746494977000658967987677*6^(1/2),
a[16,11]=-292603171929706291053929402159930330736639136252680853622275/
15473622826279161150227076887290262443510550964275858143964,
a[16,12]=-981571712956910698856930219322099934382493208458209364759608693175466609866259415309525898851630516579
4739744873539829069617203523509136682216933020431/2864769911709341530761466410944021718019372500685965429310286
78669501762253287693294397689327797388113854588113430063939405071979092547998950955940992,
a[16,13]=2729491144709837905799148766650782532906050298971406518524169921875/
2158115888622139473142775812109447802920656149243127309253686951469,
a[16,14]=0,
a[16,15]=0,
b[1]=8198160366203173411119943711500331/561057579384085860167277847128765528,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=0,
b[7]=0,
b[8]=-455655493073428838813281446213740000000/1163808011150910561240464225837312497869,
b[9]=19965163648706008081135075746915614720000000/86394404190537086868394686205782432516544599,
b[10]=89231107919981418705566970804343750000000000000000000/
699979870988335674445594679856445060562597693583175985391,

b[11]=47104273954945906713184913871143492/209684639122339601934631113492763467,
b[12]=208450044214045004640105847407967506508321767983703830842263512947307311966736473110623309727407347372795
03119387627146381678677156136042524139311907482802844083/366708498911363730202382253282651002506051447185019263
05140966586758054847604681466336103169284755987753542321202462371554120593858149755539878561976786592389608,
b[13]=605303728214230650979591128690917968750000000/103899257350518063455290077573775162739725126989,
b[14]=917401104920993498360358406096725463867187500/6724249815911346653315790737453607382989551463,
b[15]=2585449557665268951371699596493957/84574345160764140163208606048427531,
b[16]=0,

b*[1]=552562031208180939317806684253/27669654257734667858523344041464,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=0,
b*[7]=0,
b*[8]=22122338863142359758989860169000000/100946136798587090054685074667127461,
b*[9]=10183540879130529798465781256192000000/1149763833200743759976506650241312100139,
b*[10]=13137203090776300144532398437500000000000000000/
11518201923215510989126466531107437037395719117133,
b*[11]=4833611232701440504508086151728/19081321241454145230196661524503,
b*[12]=-2129662374582324648106919795703373645353118273066742230724172731025813964712473647144010599206669825382
719359113196238857709025512340589957/10355437392723670808851905462010972188912687281182073325925959875548518829
72292670881794178380097716583123063485287435793657425889233080568,
b*[13]=108476159175364085584435806396484375000000/3182895486031249071938549691320502488733423,
b*[14]=0,
b*[15]=0,
b*[16]=1839190071060649887127895100784/38045139523510634351420875415397.

Coefficients correct to 85 digits:

c[2]=.3462e-1,
c[3]=.9702435063878044594828361677100617517630931018068052998608879362755171308894275852280e-1,
c[4]=.1455365259581706689224254251565092627644639652710207949791331904413275696334141377842,
c[5]=.561,
c[6]=.2290079115904850126662751771814700052181963874976447767160913294123130556540031807882,
c[7]=.5449920884095149873337248228185299947818036125023552232839086705876869443459968192118,
c[8]=.645,
c[9]=.48375,
c[10]=.6757e-1,
c[11]=.25,
c[12]=.6590650618730998549405331618649220295333706496645300841733376899052785256008963062860,
c[13]=.8206,
c[14]=.9012,
c[15]=1.,
c[16]=1.,

a[2,1]=.3462e-1,
a[3,1]=- .3893354388572873270170426872292844785318932685715822351359938846225811208737331739581e-1,
a[3,2]=.1359578945245091786499878854939346230294986370378387534996881820898098251763160759186,
a[4,1]=.3638413148954266723060635628912731569111599131775519874478329761033189240835353444605e-1,
a[4,2]=0.,
a[4,3]=.1091523944686280016918190688673819470733479739532655962343498928309956772250606033382,
a[5,1]=2.025763914393969636805657604282571047510830037662906582191234862933748754258576548807,
a[5,2]=0.,
a[5,3]=-7.638023836496292020387602153091964592951697697070004819490073470713397946995548825172,
a[5,4]=6.173259922102322383581944548809393545440867659407098237298838607779649192736972276364,
a[6,1]=.5112275589406060872792270881648288397196918900059064260163610374675497586076219641908e-1,
a[6,2]=0.,

a[13,5]=0.,
a[13,6]=-6.304602650282852990657772792012007122987508211314778264330741972821022033704150962086,
a[13,7]=-2.812456182894725647782841837901184181118351085412178716864614602541704856268813920746,
a[13,8]=-2.679019236219849057687906597489223155566018523604994098255425457656539215991443444792,
a[13,9]=.5188156639241575115653111646150125220241338725476874476993543919914501452633547484518,
a[13,10]=1.365353187603341710683633635235238678626063069147521981032308410050891031931812147963,
a[13,11]=5.885091088503946585721274891680604830711651667380554116568117966230905660275662333499,
a[13,12]=2.802808786272062889819965117517532194812414567437761817710498854310830075285535172095,
a[14,1]=.4185367457753471441471025246471931649630462388911818955699647395240301581597055654840,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=6.724547581906459363100870806514855026676707813280324750587138792853772531682752466652,
a[14,7]=-4.254442801646117906069834096971130646155667877074834136402157009765510568985042601581,
a[14,8]=3.343279153001265577811816947557982637749506391461231978634108426874946177852892051649,
a[14,9]=.6170816631175377595284211175077097847372955653743062827190632663096616350399016594384,
a[14,10]=-9.299661239399328339377495239888008520136510050442209659489712974431044872440735981893,
a[14,11]=-6.09948804751010722472962837945508844845793704880962268046183409659987741265000744030,
a[14,12]=-3.002206187889399044804158084895173690015280585715939212282029589883510678709169409150,
a[14,13]=.2553202529443445472336424602988558373637360743415609524071247724007434613814962683039,
a[15,1]=-7.793740861228846646446230408438405063434045342664280772234110057584765675969084291419,
a[15,2]=0.,
a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=-13.93734253810777678786523664804936051202744012820562193800453886770083444926174871110,
a[15,7]=1.252048853379357320949735183924200895140313266258024599241902994425565606974984109380,
a[15,8]=-14.69150040801686878191527989293072091588299839622545945926337204097426809212173800202,
a[15,9]=-4.947050585331416856551919921369628735756447040894172199264812383958027547029949317166,
a[15,10]=2.242974909146236657906984549543692874753553717467391893981715687718860843661659481646,
a[15,11]=13.36789380382864375813864978592679139880863615933296251993509179449319351511250998420,
a[15,12]=14.39665048665068644512236935340272139004715102859917581786679600071497985584255398667,
a[15,13]=-7.975813331776800379127866056663258667436626421429459750810383427102171035732179480532,
a[15,14]=.4409353709534277758753793068298041158234962332723178384733350181869991456649004601252,
a[16,1]=2.058051337466886442151242368989994043993490280696814143888221854200939586598842198298,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=22.35793772796803295519317565842520212899391737358275646000873748563820264963465645212,
a[16,7]=9094981099755633274500919813797189078287742235138917417617038806994313454926139128448,
a[16,8]=35.89110098240264104710550686568482456492761662151620142494472904615022132670893340008,
a[16,9]=-3.442515027624453437985000403608480262215499034415596153258119792895496524594289251756,
a[16,10]=-4.865481358036368826566013387928704014495932898502565784147427222445974956966542570375,
a[16,11]=-18.90980381354342625688427480879773032856963204427713361543927303960152803824614475008,
a[16,12]=-34.26354448030451782929251177395134170514856457225123765338258842959229816220984557174,
a[16,13]=1.264756521695642578827783499806516664685830050136869435624016217846502773581776180620,
a[16,14]=0.,
a[16,15]=0.,

b[1]=.1461197685842315252051541915018784713459249152088687077766479585369427401145916417106e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,

b[8]=-3915211862331339089410228267288242030809705705305073638727375058683944427681309526433,
b[9]=.2310932500289506415909675644868993669908387496622416288355293061073996588594343329371,
b[10]=.1274766769992852382560589467488989175618410613311259890471852985464957912589118416514,
b[11]=.2246434176204157731566981937082069688984319277998004214658763800815054070167715566454,
b[12]=.5684352689748512932705226972873692126743494150750562298469757988708557228600053779335,
b[13]=.5825871557215827200814768021863420902155197903070008580216322149276117683282597549327e-1,
b[14]=.1364317403482215641609022744494239843327246517433106990078145528127464575142152409334,
b[15]=.3057013983082797397721005067920369646664029436738543908952815210293595441450746287825e-1,
b[16]=0.,

b*[1]=.1996996514886773085518508418098868756464331204128217116895433526690097865871872851878e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=2.191499304949330054530747099310837524864428909141462483430797731597721020243849805031,
b*[9]=.8857071848208438030833722031786358862953433866444769213869493736467726139009841603209e-1,
b*[10]=.1140560234865965622484956605091432032673904883224793309753983682325393279378585681962,
b*[11]=.2533163805345107065564577734569651977347332151654734735546140625349376531829114285856,
b*[12]=-2.056564386240941011158999594595981300492723931865126321129192745149217572079087131781,
b*[13]=.3408096799013119935160094894224543812829761001917277610940297281119054829623478065950,
b*[14]=0.,
b*[15]=0.,
b*[16]=.4834231373823958314376726739772871714901756833825340876670358204053584770330237882256e-1.