

First modified Prince-Dormand 13 stage combined order 7 and 8 Runge-Kutta scheme

See: High order embedded Runge-Kutta formulae, by P.J.Prince and J.R.Dormand,
Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 7, 1981, pages 67-75.

The nodes of the scheme are:

$$c_2 = \frac{7}{130}, c_3 = \frac{21}{260}, c_4 = \frac{63}{520}, c_5 = \frac{8094}{25775}, c_6 = \frac{19}{50}, c_7 = \frac{12}{79}, c_8 = \frac{85}{182},$$

$$c_9 = \frac{1588099516}{2621823581}, c_{10} = \frac{38}{59}, c_{11} = \frac{12137710719902939}{12880384770702861}, c_{12} = 1, c_{13} = 1.$$

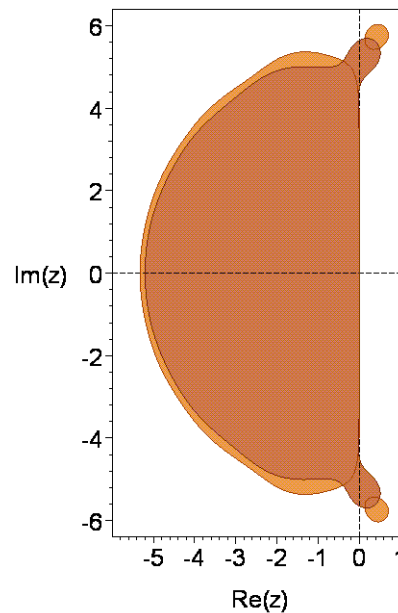
The principal error norm, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.4150420562 \times 10^{(-5)}$.

The principal error norm of the order 7 embedded scheme is: $0.2655671386 \times 10^{(-4)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is: 20.69295902.

The 2-norm of the linking coefficients is: 52.29344289.

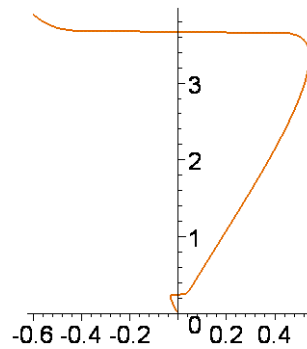
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 7 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 8 and 7 schemes are respectively $[-5.3253, 0]$ and $[-5.2012, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 8 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0.24718, 3.6715]$.

The coefficients in exact form are:

$c[2]=7/130,$
 $c[3]=21/260,$
 $c[4]=63/520,$
 $c[5]=8094/25775,$
 $c[6]=19/50,$
 $c[7]=12/79,$
 $c[8]=85/182,$
 $c[9]=1588099516/2621823581,$
 $c[10]=38/59,$
 $c[11]=12137710719902939/12880384770702861,$
 $c[12]=1,$
 $c[13]=1,$

$a[2,1]=7/130,$
 $a[3,1]=21/1040,$
 $a[3,2]=63/1040,$
 $a[4,1]=63/2080,$
 $a[4,2]=0,$
 $a[4,3]=189/2080,$
 $a[5,1]=35386216760786/100686987673125,$
 $a[5,2]=0,$
 $a[5,3]=-44744495392376/33562329224375,$
 $a[5,4]=-130465522693792/100686987673125,$
 $a[6,1]=2810347/80514000,$
 $a[6,2]=0,$
 $a[6,3]=0,$
 $a[6,4]=2290521896/12214384875,$
 $a[6,5]=20822343029/132148011600,$
 $a[7,1]=138505497184/2994988578333,$
 $a[7,2]=0,$
 $a[7,3]=0,$
 $a[7,4]=1566105807319040/13552618480670643,$
 $a[7,5]=-606871023274973500/30796791681909061853,$
 $a[7,6]=16602107112000/1693883986225547,$
 $a[8,1]=59999904353181686216950331/2249884207481006647898028864,$
 $a[8,2]=0,$
 $a[8,3]=0,$
 $a[8,4]=5981376691957537515835663240/30483180270255403740704658003,$
 $a[8,5]=1661456222056235077512897140918443625/90922405219599177487405743316056877536,$
 $a[8,6]=2211563900995279846807485375/11150972535520658422893524486,$
 $a[8,7]=15704998636794727746031233193/570189554826972622877555683008,$
 $a[9,1]=64939466018375489658142216319197843886475359321694965725720056262/
415247975380014942178782540782135610163612367247439437261931917345,$
 $a[9,2]=0,$
 $a[9,3]=0,$
 $a[9,4]=-6305325370973701666122802604235085095289790008673347841152170827776/
4236124143580547704635633274434775851207237002707330437591827767971,$
 $a[9,5]=-95650593791958694876420643337749960311992974338100464385734155686511064600/
394847454121060600104180236203529705376851852370075245873413225212284626911,$
 $a[9,6]=-16293982076944456708126813343438539159518323455715858645822630154400/
144888114795492876284870527195042314680205064855056353625322939032737,$
 $a[9,7]=2669487390492036620016331082852968476791379043728435865043496428387959186/
143048046239328840548411628022776078838499542428832760725719325772588495,$
 $a[9,8]=602674833897368459760567581815170083895345000992/1413533930389731049054478341183066624280245618645,$
 $a[10,1]=871241955167208078624236716337756572913977/
3998672876743862003809330668405165189261684,$
 $a[10,2]=0,$

a[10,3]=0,
a[10,4]=-20466026950708854361118209229191632279040/
9260062050425335398884032978853642256027,
a[10,5]=-66810851679747607091148227663855349775375/241838136303974859372186278864585590025238,
a[10,6]=-999374201472538625818284267563414269197750698500/
3509513728857473309592542004098729409391932121269,
a[10,7]=579550088108568968991588572622815995805515214777252353/
220749409675933343702003088943952910884895117889516086,
a[10,8]=85514082302018951495522586534714340/157907282243529026819440852346587131,
a[10,9]=347885336073894942031270259770617859046705713087359496783/
11433521113318389940404049729543152702327016565230886695428,
a[11,1]=-3849973435987321042940189446734664272646668805846454834279800867941271218828755669958959523535361580019
086009093078044101348313/20559838595328845238273884013321695557452904731598724220881848820406242635286058502537
60928837960598177464533119000185546855040,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=9097288139334115377848359397486338841131228452962603648491793704899017308284940182319765951308853906638
5645271040/4591959216979045220818978561062180179647593175521454988101838502477871660155392680101000239888922219
438564829773,
a[11,5]=5818630248778893651489158307921421968186276707575182779011477518944166335803012856192845011223979675942
34412253262573171003638150037573539746094440196143725354037840555138292533911821370114920277656174559196066521
29707218166908104,
a[11,6]=-3551204233895435020927025015984848780923844424904810313659011469330014616901464246253474174284069273589
53868072305056198155287861625/104721401874931575602837951234361784640323533624920472840800958126969401321204565
906333172797231043756744686824025127179051292929594,
a[11,7]=-1076092807942916103070556617975153700373845826271425179639087391578469933146548848804391580054942772381
9391072734135197261267801143387590983/5536129016696934424143699103305339284058635047602834490219216161028765252
06401849730080108128718628362718047005107510989589781736777877248,
a[11,8]=2536207053082647295279026657161826188278523602491166394876717712782142977636720993209288073851197405707
184185708544714677789/23117421802055442878590360663017399943119085911585981808126773142635042818489471440392865
1694027899117380347632599571234970,
a[11,9]=-3515492581659134020217121413899801853819811099581393364903137632602053493256736258802918764873513110971
6017982642973306394057845135367219530321584105983573/1838386404248901967533530608933434360458041087074316562633
418673263177963612451752865972174092171311568498329139690311880464974695253884658423802827630848,
a[11,10]=112858803386587198142798036491847077272787763450266758366772153568174712180894682833765259588206595443
30004948143458844301199/855715417590975296652823496654982366670870627175075907006429960168167810782424509231814
407803853018258981231154206884405792,
a[12,1]=1108524799617617791714974849075333282718700392787956550969/
932805475522949137744563976401542687670098714912971641600,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=-28405882790583724536549001427174752/2137163669576406915238819490049045,
a[12,5]=-422112698450192024795459306079488772665/580294377938960443638415401203741112864,
a[12,6]=-61837987568229633578360162012959272723267383643781370789900245805/
19752561875140222730107294656794234167228260272603939093085796164,
a[12,7]=43670039297741446145170398880712307339091524325216179599861508907214731241/
3079203900696613003495805425166512795596681037175109943842312648348403200,
a[12,8]=115628164236945050271998770539010307604252845138975826731/
35303724863904521461393310085693148436531406080749217700,
a[12,9]=-177320223548192634044374486016522725683399640990648534164453128300088081931990274232374457673/
52077371443741272675395301117751253505965189252166244383472395632427339063503258760916578816,
a[12,10]=43939076969230525929719190227717076353273536961/15716386531498655626517519605711203854631997120,
a[12,11]=572289195988097320788476549926876088695721019369260692863272999342237347290740040182078112322626866613
5872509693/5075393349275643842654926637051366239626398565842241074562651246009551916906033127855639694295252362
1877760394785,
a[13,1]=47130861582001939140164636113771930339176682574842011136016686376508232049156059155340187/
25450761129789120292964556204256495704075829674321920325331855358871298512909106704460800,
a[13,2]=0,

a[13,3]=0,
a[13,4]=-26426181746571564004202199644987714392242272093183562775599190184/
1325240789428042837337797203265528677765193314583692985895176215,
a[13,5]=-1379579743987445974056781170267959117425126945122437588505930040152595/
1439346532917448093567922735439169574064068903744942330803852906902912,
a[13,6]=-2476089662910889279145305114957758778882784877281019840514762120440055108883455121425080658549045/
1616792827155328846692403285307974099032273888708232642624839841540966484783833491796822130437296,
a[13,7]=7558626714320912708686693512167191295106481760442492079779790457997786854143103960654408670574574819754
1/

3652752951827795019658091455824962818933350646410181034254506711621491098715668333769375978227176499200,
a[13,8]=-2464778404581796707634412169730152236520279949696023974179841941852910147376906311143/
2564056298367654958401367475908190783852477134598239999990331124937541413483498136400,
a[13,9]=1410244117865896853343075983463055481037571119074177373700313137294106457444012954985175537403556203076
7370855627323256410263/4262653175804666142059438099042378977047841742984927504145520020848347139650684544879388
055150668232157941719110815832807424,
a[13,10]=-686629964959811655794864031134025425605280586149672844982119431658202996035397/
428807516607214078810031913585939526290813818647238166891209033414286755746560,
a[13,11]=527291822692192236035059442563329476440047665932916090608252333773706318325396514506524491699291412436
0797717906025980224315201/3766829349891551189733829188322577881841107185143660551246049890380092651869023855299
5774934362128802362631127245852123649002220,
a[13,12]=0,

b[1]=3409953580900604406425232360985/79495014408058339782242453137536,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=-805535416086967159323983767211914062500/9210435420860414143938037089680273987499,
b[7]=19719832137478068075118602632811679424334551/79696781027264837518657989866627858017278720,
b[8]=80459414119966093309351211019820183317164/119639872390655466532421724648374884180305,
b[9]=-382013342623504249401117059278075052366388617117456070373108742111080233591676959931113/
26330881281004595160175101120614399602238312383062905874611306023371485181681552344832,
b[10]=241743560933350076850518574357718900273909/
170089035238937435855046631445976339333280,
b[11]=841759806029293777438856535711108545703091040238125009955133388876178574859138793793500644074095708056552
20048940969288879576409/527710811335333608880991616865444542801201525291974756691043468224087151915404783336363
301032497837639335309251779873516740894780,
b[12]=-27689937696850083623738460105673/75789176359867295003488060243300,
b[13]=9/25,

b*[1]=147945363815482799267720609668391/4485790098740434887712252712760960,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=-2394764228294255894551756746822265625000/3353107826027524043184815346012634308813,
b*[7]=52259035454255485496162754845494289328569/169929170633826945668780362188971978714880,
b*[8]=185695821828301359001694860929349400622872/97438658957337957278982641723934184023135,
b*[9]=-26550311191742903737130521190016864871475127943459723672642954303957780223194883/
7186705163637658737619809418070719345401862558326120631256152122203587311671040,
b*[10]=836395932136105823989819161386010611587209/274225179262776682296911916004737363414880,
b*[11]=59552141641437684924034185787424050771374478317422516904737183788888414352678675352456210549528815883853
4856682179/8019121491855517271394784086541158658609709734030740897808988968695092028711532342011910716986498732
256686142376030,
b*[12]=3/79,
b*[13]=0.

a[10,9]=.3042678914273041395742334830379141818794657681956314459772168477570015226782553651272e-1,
a[11,1]=-1.872569873608846039831009510912153440911890074761952132692111244280535583070394902131,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=19.81134350169388625622912482303560938288529778602452213936504301450233773223224067317,
a[11,5]=.7952098453580818595691918197107716743718244577623271569195512586460953396577836614783,
a[11,6]=-3.391096920318758250534481710495758040602188132129591179267872386092357463929831327451,
a[11,7]=-19.43763963407330572983345377822555699508409190821508975970526450627416827364778897025,
a[11,8]=10.97097710462308183376345445101184895565549490449010035794472681256324437683638285014,
a[11,9]=-19.12270768285754828468553464979349447882775971431503134387170291001024787543030697451,
a[11,10]=13.18882435287998373159446346648559808742220559672367930309928432650009926509300351187,
a[12,1]=1.188377243386309387786175366645162669300833281043850871665182197794962193009299895867,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=-13.29139325871746023447192970071932850990544985962539036811423857859897826393683465103,
a[12,5]=-0.7274113182854114932610914155496627533913947417174953209870811223401252312812732325093,
a[12,6]=-3.130631254776952719549757752904772789833750042741335795648752733917677339460868642323,
a[12,7]=14.18224992760690723559163528359050917165116732582809002644360023340305221975635977461,
a[12,8]=3.275239785113054674985239940166348605360570916704580580378424366927966598729544504897,
a[12,9]=-3.404938049527905134957440587524824429877873373664724825399949842928205173780731490793,
a[12,10]=2.795749320695834303836369493223136809763191879536845176993421352568693711864070190727,
a[12,11]=.1127576045056239800407993730734312269327046146355796546693941270903112851004336505582,
a[13,1]=1.851844875744682911376519711355896389120654336222937299455129127097526134765096240712,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=-19.94066433615944601245735430307208892803221429779519844836646087866412625732279967886,
a[13,5]=-0.9584764422165527470180055268057926726965398090807836323601836933682342576167814509319,
a[13,6]=-1.531482340422955063912851556132194562527723130425131687160586792703012911361223803270,
a[13,7]=20.6929590202339400703115106955268725228746620641929935515996585041403172345706958775,
a[13,8]=-0.9612809227905560636616810118608517627820686673367950721354170215582601210620864728578,
a[13,9]=3.308371710536087382388341346459508923018928445456415959080341779822986239259624765251,
a[13,10]=-1.601254498504423090720921831086511886534319428199140601947746307975511903563211363158,
a[13,11]=.1399829335797686769748021015893472481458163447383968282749579369346013534443121753629,
a[13,12]=0.,

b[1]=.4289518790948153356429220083486953633112772497762413602598138413163772116363287041230e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=-0.8745899398659658631896952508266984065157053169810570460081211345155460331618157404098e-1,
b[7]=.2474357418617920437332122803972959812195539386559399500818514864365021412898597744967,
b[8]=.6725133729434704498248480315542822165541365191966056626425684254256537324453152301975,
b[9]=-1.450818673885758354763066050939153096169418415853375092611913580049325530474770724460,
b[10]=1.421276571965699594357647217464700138013115830947873677195659472590851102893682868017,
b[11]=.1595115711007099055782044848792580095704369672726560479711647751174144425147839300195,
b[12]=-0.3653547779087985859761686391085829448673820334992186767044998502011790065163223746421,
b[13]=.36,

b*[1]=.3298089312226721923895175387044590538095261262627793622981369276985797334856865570042e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=-0.7141924305880041303658286486237119465127822053927899381308730502405284545662919389725,
b*[7]=.3075342229902729957994640247167883339530081981531341759539070664928196563920036606108,
b*[8]=1.905771526572481516651707357795267168871828679810259974885253301925192626927011857320,
b*[9]=-3.694364884492362427054274903393176790389241794248642446343009011980599694460995399802,

$b^*[10]=3.050033313442119000270365021708782491304974776900061851830869536907633429803673941771,$
 $b^*[11]=.7426267540892202799126096354585800194822175746815414177657010969524471572058618539803e-1,$
 $b^*[12]=.3797468354430379746835443037974683544303797468354430379746835443037974683544303797468e-1,$
 $b^*[13]=0.$

Version: 19 Nov 2011, Peter Stone