The "Classical" Prince-Dormand 13 stage combined order 7 and 8 Runge-Kutta scheme

See: High order embedded Runge-Kutta formulae, by P.J.Prince and J.R.Dormand,
Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 7, 1981, pages 67-75.

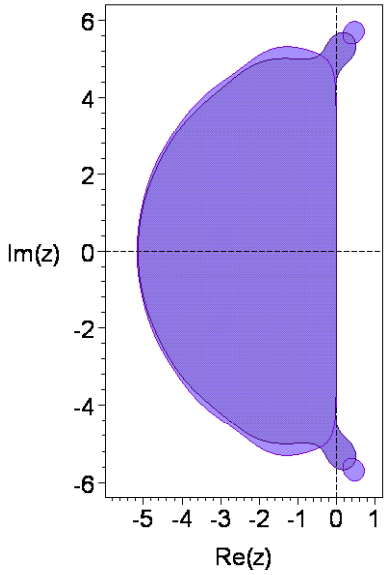
The nodes of the scheme are:

$$c_2=\frac{1}{18},\ c_3=\frac{1}{12},\ c_4=\frac{1}{8},\ c_5=\frac{5}{16},\ c_6=\frac{3}{8},\ c_7=\frac{59}{400},\ c_8=\frac{93}{200},\ c_9=\frac{5490023248}{9719169821},\ c_{10}=\frac{13}{20},\ c_{11}=\frac{30992876149296355}{33518267164510641},\ c_{12}=1,\ c_{13}=1.$$

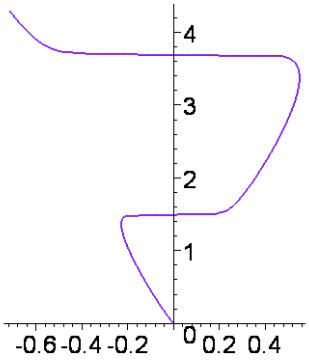
Note: Prince and Dormand give rational approximations for the coefficients which are accurate to just under 20 digits. For example, the value they give for the node c_{11} is $\frac{1201146811}{1299019798} \simeq 0.92465627764050444441$ while the 20 digit decimal approximation for the value given above is 0.92465627764050444674.

The principal error norm, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.4507447204 \times 10^{(-5)}$.
The principal error norm of the order 7 embedded scheme is: $0.2879665418 \times 10^{(-4)}$.
The maximum magnitude of the linking coefficients is: 16.67260867.

The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 7 scheme appears in the darker shade.
The real stability intervals of the order 8 and 7 schemes are respectively $[-5.1666, 0]$ and $[-5.1357, 0]$.
The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 8 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[1.5019, 3.7023]$.

The coefficients in exact form are:
c[2]=1/18,
c[3]=1/12,
c[4]=1/8,
c[5]=5/16,
c[6]=3/8,
c[7]=59/400,
c[8]=93/200,
c[9]=5490023248/9719169821,
c[10]=13/20,
c[11]=30992876149296355/33518267164510641,
c[12]=1,
c[13]=1,

a[2,1]=1/18,
a[3,1]=1/48,
a[3,2]=1/16,
a[4,1]=1/32,
a[4,2]=0,
a[4,3]=3/32,
a[5,1]=5/16,
a[5,2]=0,
a[5,3]=-75/64,
a[5,4]=75/64,
a[6,1]=3/80,
a[6,2]=0,
a[6,3]=0,
a[6,4]=3/16,
a[6,5]=3/20,
a[7,1]=215595617/4500000000,
a[7,2]=0,
a[7,3]=0,
a[7,4]=202047683/1800000000,
a[7,5]=-28693883/1125000000,
a[7,6]=23124283/1800000000,
a[8,1]=1487376265803714 3/879168438156250000,
a[8,2]=0,
a[8,3]=0,
a[8,4]=3467633544794897/8940695981250000,
a[8,5]=1474287494383247/40978189914062500,
a[8,6]=26709270507070017/135600555715625000,
a[8,7]=-14591655588284/84484570233063,
a[9,1]=75863310390219468820490835024413376642776769076177505365663 52/
10979446160149121786022035333858103139405922033645116007873044 5,
a[9,2]=0,
a[9,3]=0,
a[9,4]=-23605733941281244983594646534422173553593912943099105969356 8/
37218461559827531478040797741891875048833634012356325450417 1,
a[9,5]=-32997391663688836030962505881679272769775337904994804985774 08/
20470153857905142312922438758040531276858498706795978997729405,
a[9,6]=46959196036948462154705546380652712739714685023691702355420 16/
33868800019443053645017125945121606294438606951244256159879561,
a[9,7]=29185181189839420138460293964062753233084311383705300443443 2000000/
31017423377806164562036073019719535062294592230471170282952811 7367,
a[9,8]=69929599810411038409442606613522311592035109040000 00/
33042342481018810238716485165383193327572243242031481,
a[10,1]=99299034813490800741867453179778547/54097112353915116290695282601 1200000,
a[10,2]=0,

a[10,3]=0,
a[10,4]=-24938352590805547245821010153717930905426875,
a[10,5]=-48550347897506146536052/166675363458599395434375,
a[10,6]=-24871192635697392099560348960246/939492072180864357472739828818125,
a[10,7]=47877608921692948223767392505292200/16811909973162934455241559003278502 7,
a[10,8]=65603089816432381550967502331415898283311622790130 7,
a[10,9]=15862816866444782703212414594398999566234085401892751777/
12818966182821619734532382093543907143647820508227904000,
a[11,1]=-10211600338632299897812760008490487552214126936479150504391350418452509781843472116577808754735916029991987254757182057348792169 3/84016717385376362440519288454722754561118206109968455863629915569413007015484884082989277327146750610032897620427741658059440288,
a[11,2]=0,
a[11,3]=0,
a[11,4]=33859087260675221974250714335702190271727116952436100401071846742849806655875297416581697925587035223680 00/203082120735150879650585455213299620604169484916038024212568757049115731089319226716911539443928749680 51,
a[11,5]=68189290605616416787945483858208595886847902887436807644220496617128174124615359699202587876643756190729/7446344426955532253854800024487652755486214446921394221127521091800910139941704979620089779610720821618 7,
a[11,6]=-17342820437324244740726314985146100964868353389355340790581453767606228935245032746803750389421689457561879434813804636056095184 0/28634553737749980591246227962162248924990921597569580986348213480206660351124448902040471191908194953464017206515243749691247 7,
a[11,7]=-33995492802231244436964234901030037667078923263747559461389750009674666902411113487210065091287752549522126826588427659655211542400000 00/21242438510511769164808770310383807979042545628791242485154692238932848550014521428922544896130453883076607244244472256410349591588812 3,
a[11,8]=14452808190943733856347403293564049428070036006455540637351575894308889412108389906599600485253194980566957563315340127500000/97329875395163843179370172152820088378991468031329892681461507130149534114266524575869679991862309558171576588688764974138 3,
a[11,9]=-84720571416023928911330742479353907795165831891759198026230404283861227570000876601695770093019554505337422084139866018794462110706582931060886539402641825835 5/63358704383980726998416112830322706485300332630289060627019459285960825979588560697460438306253611095891491565590971432387489415884103732012574255897878321824,
a[11,10]=11518898894932359809845803526389466935911206820754863603813124459905849617271064662253637314556221890963373869754924577000 0/22435701423704647109276644681016984863989966659062291511947760084943925084166270812354794844590216383205333034660617626349,
a[12,1]=21969012306961489525323859125985377266525845354279828748/
848680156480898392109974605178193806019336005216929150 5,
a[12,2]=0,
a[12,3]=0,
a[12,4]=-22918727624380695055 4/480025046760766258851,
a[12,5]=-38290183118660503879 4/880045919061404807893 5,
a[12,6]=-60797771477337446043740101618525344141812083206012640296 8/
199370728929424959394190105343852509479613745231838418799,
a[12,7]=53020292330357728946140976322136266822959669478536151807837 0000000/
95053876625605288538716108061469119642073558773397887106191329236 3,
a[12,8]=10296804725511613716498721966303750289814384314500000 0/
16726911019578511096352500731821705820659977305290973,
a[12,9]=-11138378934196540732160214244491751411580083469020132937902744976175989510001197392918517116361 5/
22003454775272439861723739055800175619777853128055268766511800511549546753240522083740083243539,
a[12,10]=44737471541467333111555512048686345065750/
203915118422642628703982861458686181783 1,
a[12,11]=59654691074835298853819814743244482911245107539943697087661889433746108795332800266475940740162307233063305794825 2/44310761259837620854492842053484787905357173020434162349119014793285127944659808009988163544481811967216363734837 87,
a[13,1]=10662212058558323260886957784601590151924056449680168970665210768477640326136806562686936 3/
12964316936105255574883091974749042062162626542405449504718743057238901743393565516097040 00,
a[13,2]=0,
a[13,3]=0,
a[13,4]=-13357914135066126646436906844788064710775267466146660 64/
11457490779860177917911027181490398312042955954432017 5,

a[13,5]=-15914155430441680998820264959592886885690840604731101 76/
210053997630769928495035498327323969054120859164586987 5,
a[13,6]=339757584885326318327424168576455729131788667042475396104230123701938451674704551768909 24/
475868562254695738193045962742081524026401209254559703560636427419729595970090660649560 75,
a[13,7]=121766534286671130904929846562075746330639677592466012549304484094444708707860242351151385278000 00/
100835378614511896862098889151823403422404799444204907131025868684018433710172135161297301622139 9,
a[13,8]=-33978437493536731429682461377644488311386945023494213117291230010053597934592525000 0/
159698690787587746004588725210359673189662237866695585709500421500486548151424426361,
a[13,9]=49550956927004994186280523809480166779787330138413658781097756776690568663981109497888697711358576712988021316931544210868081 43/24897898854628731585312340225797229827848222574581641051268842885973245429308825810995222813889709408263246473863406 5850671680,
a[13,10]=-56311517102778077667506686631808740624719411030164852210864809470841 5/
240353259544449837238311676791806025729252318375165085159652091663457 7,
a[13,11]=14733248758015845088795595706165871801253896746308336980696320070242655943491587671475183390886221739638815766471499017444852178080 9/83759908408574935814934041504805030897008585189361480362907354604873532794781607040033040487081682023472749514352267349882647626782 5,
a[13,12]=0,

b[1]=21281098821568367798966496756755 9/509757550445899998416452893058080 0,
b[2]=0,
b[3]=0,
b[4]=0,
b[5]=0,
b[6]=-57066799936860580251546080222412 8/10291145812277763122885317774476825,
b[7]=39708946433991591507541268264960000000000000 0/16592904867230933191457493387696939021741363,
b[8]=17709428821948047243769086200000000000000 0/25172935667010050673481444270577446344 9,
b[9]=-66822609448295850920212176513645119787713273203022994500406050793972052314809461629969645683/
879523052203383369694476438991508163634568215629859987780224350700010917780420975458955945 60,
b[10]=31465273116386995562914595856880000 0/476340207420551356675670184044905167,
b[11]=17701495408878964770752284899075743251950431468606707578447650303821245053609536531636038563493368821324403974396957887263117417976 9/11190199836289918385223841012611048596764271637269221217337320803775766164856319330679851009081324438622050909613832509902151781082 00,
b[12]=-45466591600039206455642034424209 9/190948215842917628806807 1462671400,
b[13]=1/4,

b*[1]=71360402264821087043428095572 17/241464102842794736092004001974880,
b*[2]=0,
b*[3]=0,
b*[4]=0,
b*[5]=0,
b*[6]=-15349154422148033115423212285265536/185240624620999736211935719940582 85,
b*[7]=45434521806506196832804182374790400000000 0/14597863519558005740285184798560356910622 9,
b*[8]=36569628694677469315576699923215000000 0/14821448103005917686255429804171767474 1,
b*[9]=-83633666985150383186688953015846812393223150275340832581712401361951588696507757 1/
328368994730082689886153304749497093954319862912916225944630536728837081959128864,
b*[10]=29469438504438782329301995145428600 0/204145803180236295718144364590673643,
b*[11]=17594827546981875646754892595911701884330547676578052124709180936033535272882729727288287081467080847427117240496362215538062991881042724642102674239395267858651021708117455950739664256397232990400499408177224090598360818186741893 5,
b*[12]=2/45,
b*[13]=0.

The coefficients correct to 85 digits are:

c[2]=.55555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555556e-1,
c[3]=.83333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333e-1,
c[4]=.125,
c[5]=.3125,

c[6]=.375,
c[7]=.1475,
c[8]=.465,
c[9]=.5648654513822595753983585014261682587385670087264133215107858541861772043626893634869,
c[10]=.65,
c[11]=.9246562776405044467450135743183695426492034467027398177693057974193090932038137681734,
c[12]=1.,
c[13]=1.,

a[2,1]=.5555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555556e-1,
a[3,1]=.2083333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333e-1,
a[3,2]=.625e-1,
a[4,1]=.3125e-1,
a[4,2]=0.,
a[4,3]=.9375e-1,
a[5,1]=.3125,
a[5,2]=0.,
a[5,3]=-1.171875,
a[5,4]=1.171875,
a[6,1]=.375e-1,
a[6,2]=0.,
a[6,3]=0.,
a[6,4]=.1875,
a[6,5]=.15,
a[7,1]=.4791013711111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111e-1,
a[7,2]=0.,
a[7,3]=0.,
a[7,4]=.1122487127777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777778,
a[7,5]=-.2550567377777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777778e-1,
a[7,6]=.1284682388888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888889e-1,
a[8,1]=.1691798978729228118143110713603823606551492879543441068765183916901985069878116840258e-1,
a[8,2]=0.,
a[8,3]=0.,
a[8,4]=.3878482784860431695265457441593733533707275558526027137301504136188413357699752956243,
a[8,5]=.3597736985150032789670088963477236800815873945874968299566918115320174598617642813621e-1,
a[8,6]=.1969702142156660601567152560721498881281698021684239074332818272245101975612112344987,
a[8,7]=-.1727138523405018387613929970023338455725710262752107148467532611655731300161441266618,
a[9,1]=.6909575335919230064856454898454767856104137244685570409618590205329379141801779261271e-1,
a[9,2]=0.,
a[9,3]=0.,
a[9,4]=-.6342479767288541518828078749717385465426336031120747443029278238678259156558727343870,
a[9,5]=-.1611975752246040803668769239818171234422237864808493434053355718725564004275765826294,
a[9,6]=.1386503094588252554198669501330158019276654889495806914244800957316809692178564181463,
a[9,7]=.9409286140357562697242396841302583434711811483145028697758469500622977999086075976730,
a[9,8]=.2116363264819439818553721171319021047635363886083981439225363020792869599016568720713,
a[10,1]=.1835569968390453854898060235368803084497642516277329033567822939550366893470341427061,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=-2.468768084315592452744315759974107457777649753547732495587510208118948846864075671103,
a[10,5]=-.2912868878163004563880025728039519800543380294081727678722180378521228988619909525814,
a[10,6]=-.2647302023311737568843979946594614325963055282676866851254669985184857900430792761417e-1,
a[10,7]=2.847838764192800449164518254216773770231582185011953158945518598604677368771006006947,
a[10,8]=.2813873314698497925394036418267117820980705455360140173438806414700945017562775967023,
a[10,9]=.1237448998633146576270302126636397203122013536069738523260934117931117648560568049432,
a[11,1]=-1.215424817395888059160510525029662994880024988044112261492933435562347094075572196306,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=16.67260866594577243228041328856410774858907460078758981907659463146817850515953150318,

a[11,5]=.9157418284168179605957186504507426331593736334298114556675054711691705693180672015549,
a[11,6]=-6.056605804357470947554505543091634004081967083324413691952297768849489422976536037188,
a[11,7]=-16.00357359415617811184170641007882303068079304063907122528682690677051264091851070681,
a[11,8]=14.84930308629766255754539189802663208272299893302745636963476380528935538206408294404,
a[11,9]=-13.37157573528984931829304139618159579089195289469740214314819172008509426917249413996,
a[11,10]=5.134182648179637933173253611658602898712494286162881495270691720760048063805245199662,
a[12,1]=.2588609164382642838157309322317577667296307766301063163257807024364127266506000943372,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=-4.774485785489205112310117509706042746829391853746564335432052648850273207666153414325,
a[12,5]=-.4350930137770325094407004118103177819323551661617974116300885410959889587870529265443,
a[12,6]=-3.049483332072241509560512866312031613982854911220735245095857885009959537455491093975,
a[12,7]=5.577920039936099117423676634464941858623588944531498679305832747426169795721583100328,
a[12,8]=6.155831589861040097338689126688954481197754937462937466615262374558053507207577588692,
a[12,9]=-5.062104586736938370077406433910391644990220712141673880668482097753119682588189892664,
a[12,10]=2.193926173180679061274914290465806019788262707389033759251111926114017568440058142981,
a[12,11]=.1346279986593349415357262378873236613955852772571946513284934221746877884770684011715,
a[13,1]=.8224275996265074779631682047726665909572303617765850630130165537026064642659285212794,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=-11.65867325727766428397655303545841477547369082638864247596731917545919361630644756876,
a[13,5]=-.7576221166909361958811161540882449653663757591954118634754438929149012424414834787423,
a[13,6]=.7139735881595815279782692827650546753142248878566301594716125352788068216039494192152,
a[13,7]=12.07577498689005673956617044860067967095705800972197897084832370633043082304810801069,
a[13,8]=-2.127659113920402656390820858969398635427927973275119750336406473203376323696576615278,
a[13,9]=1.990166207048955418328071698344314152176173017359794982793519250552799420955298804232,
a[13,10]=-.2342864715440402926602946918568015314512425817004394700255034276765120670064339827205,
a[13,11]=.1758985777079422650731051058901448183145508638446243836782009233893397195776568900819,
a[13,12]=0.,

b[1]=.4174749114153024622208592846850711513419360280744778485846131359556941056165592859127e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=-.5545232861123930896152189465471671889359328156519226303661201143086248409346173220672e-1,
b[7]=.2393128072011800970467473542487569696603053593110659071772286813575015789696127063297,
b[8]=.7035106694034430230580464108897021513663799729422329988912282232809616439130702896567,
b[9]=-.7597596138144609298844876770850584076554230192157088121727371293320966312254783676226,
b[10]=.6605630309222863414613785948378206399404197125341442757648140724130090459250911959182,
b[11]=.1581874825101233355296148386006854439728567324034642678211136427219891617064005758134,
b[12]=-.2381095387528628044718635553056971935251390792174541593034967926060717257568905964800,
b[13]=.25,

b*[1]=.2955321367635349698196488311203224657733277925009198076731622388624965866492863628737e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=-.8286062764877970397668056126887191847354037544018122961965538027330129339209559093501,
b*[7]=.3112409000511183279299137516268570512897363217826855582698888340873138124416908811814,
b*[8]=2.467345190599886981964685704068761458562259575475834628418174165533324998199993514039,
b*[9]=-2.546941651841908739127380075415708961780905163114681004322493329883513805107784462867,
b*[10]=1.443548583676775240301874950690104268511068010189240811834537552274685797398657155566,
b*[11]=.7941559588112728727130195416222867713146778637419587678468591239050802787902574069868e-1,
b*[12]=.4444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444e-1,
b*[13]=0.

Version: 19 Nov 2011, Peter Stone