

A modification of Terry Feagin's order 12 Runge-Kutta scheme with an order 9 embedded scheme

Notes: (1) The embedded order 9 scheme requires 4 stages to be added to the 25 stage order 12 scheme.

(2) This scheme has $c_2 = \frac{35}{76}$ and $c_6 = 1$.

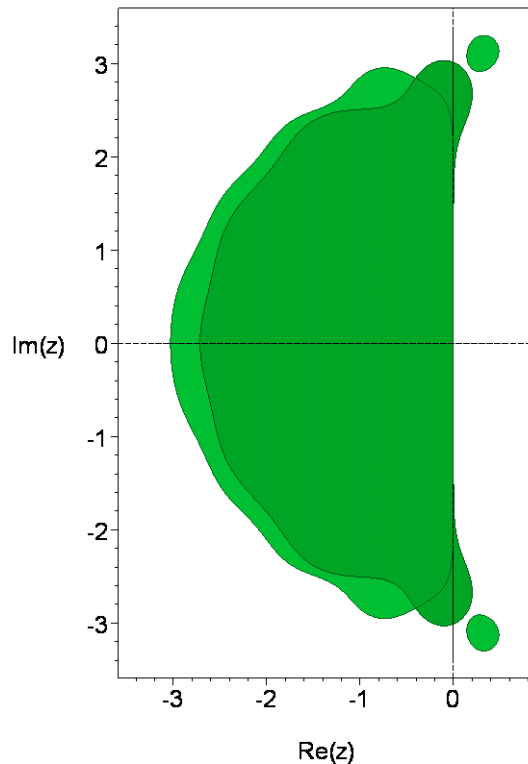
The principal error norm of the order 12 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.1125820716 \times 10^{(-6)}$.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is: $0.5180739273 \times 10^{(-4)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 12.92133273.

The 2-norm of the linking coefficients is 32.60927041.

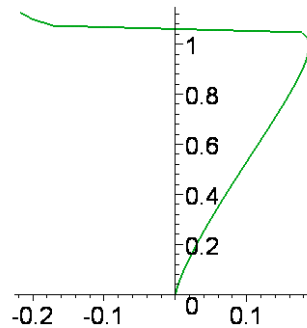
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 12 and 9 schemes are respectively $[-3.0305, 0]$ and $[-2.7137, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 12 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 1.0647]$.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.4605263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157895,$
 $c[3]=.5556,$
 $c[4]=.8333,$
 $c[5]=.33,$
 $c[6]=1.,$
 $c[7]=.6718357091705138127122456610027975704389534205686825507102221981691883968854641411340,$
 $c[8]=.2887249411106202019354584889670249769081185983418069764696736835244986590217861541568,$
 $c[9]=.5625,$
 $c[10]=.8333,$
 $c[11]=.9476954311791992875623801621018367216495893258927406464583220401251379590957558619519,$
 $c[12]=.5481128768638026438877536748107544758421536129311287850283685092941115229776952973311e-1,$
 $c[13]=.8488805186071653506398389301626743020641481756400195420459339398355773991365476236893e-1,$
 $c[14]=.2655756032646428930981140590456168352972012641640776214486652703185222349414361456016,$
 $c[15]=.5,$
 $c[16]=.7344243967353571069018859409543831647027987358359223785513347296814777650585638543984,$
 $c[17]=.9151119481392834649360161069837325697935851824359980457954066060164422600863452376311,$
 $c[18]=.9476954311791992875623801621018367216495893258927406464583220401251379590957558619519,$
 $c[19]=.8333,$
 $c[20]=.2887249411106202019354584889670249769081185983418069764696736835244986590217861541568,$
 $c[21]=.6718357091705138127122456610027975704389534205686825507102221981691883968854641411340,$
 $c[22]=.33,$
 $c[23]=.5556,$
 $c[24]=.4605263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157895,$
 $c[25]=1.,$
 $c[26]=.2705326688111747043012079860052085038730320156572781993995483301865608921746412080613,$
 $c[27]=.3383084577114427860696517412935323383084577114427860696517412935323383084577114427861,$
 $c[28]=.6507936507936507936507936507936507936507936507936507936507936507936507936507937,$
 $c[29]=1.,$

$a[2,1]=.4605263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157895,$
 $a[3,1]=.2204585537918871252204585537918871252204585537918871252204585537918871252204585537919,$
 $a[3,2]=.3350970017636684303350970017636684303350970017636684303350970017636684303350970017637,$
 $a[4,1]=.208333,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.625,$
 $a[5,1]=.1933,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.22,$
 $a[5,4]=-.8e-1,$
 $a[6,1]=.1,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.4,$
 $a[6,5]=.5,$
 $a[7,1]=.1033644716500104775703954356904817915433427083303498792441969232007020836692076572831,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=.1240530945289467610615818892371153282110747849551802980440742772315189064222869368349,$
 $a[7,5]=.4831711675610328992888364804519625087241092575172891773023800341818228904190296838151,$
 $a[7,6]=-.3875302456947632520856814437676205803957333023413680388042903644485548362506013679914e-1,$
 $a[8,1]=.1240382614318333240819045859801751681400246706986336122924798440448279924947470898167,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=.2170506321979584863178462569531599428759163537577341676846566744497954872579456743665,$
 $a[8,6]=.1374557920759667598129078018350481905944439909394085308429177535450188051849310154998e-1,$
 $a[8,7]=-.6610953172676828444558313414981495316726682520850165659175461032462670124939971157633e-1,$

a[9,1]=.9147748948568829831449918469804321970888320999766601000904864070801948953424558529918e-1,
a[9,2]=0.,
a[9,3]=0.,
a[9,4]=0.,
a[9,5]=0.,
a[9,6]=- .5443485237174696899657549441448386113461568738470091780683178340728768152294577966066e-2,
a[9,7]=.6807168016884535185785151208951038631127517307587943722039518677930013251388913149245e-1,
a[9,8]=.4083943155826410467273068526538947800933031856649246445512393508534091461041598611744,
a[10,1]=.8900136525025510189545093554238417801432326974034341186926989993223983196257058017745e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.4995282266455323601977934084206928004058911494068140919558100299611985086558381414011e-2,
a[10,7]=.3979182388198289973417396030013471560834350609314249708263044040250700525391549655752,
a[10,8]=.4279302107525766110681926083008979815582407305803964063123594678423525630853815189010,
a[10,9]=- .8651176375578270057402774759550291032672463941289959659415853876594109934033211273435e-1,
a[11,1]=.6903774070653988426201898408986224060890373268876867352998249477744072559861130193951e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=.1316633083077899368614323951690414312668647200728382264527827130788686729110294170782,
a[11,7]=1.559452296070784420981759080324071365866106166789649899338117387179237025915899302256,
a[11,8]=.5815257048364216745068908293243488546452802574690854130846498244499467720756344927418,
a[11,9]=- .9727617537905681403037404194099887784546073517706883826674676140870433402993093273047,
a[11,10]=- .4212218649517684887459807073954983922829581993569131832797427652733118971061093247588,
a[12,1]=.4445222936894093435028313133100260262048154164119625771429151123186075642095063957879e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=- .3908103224388063079871748472857050625587906588627345142672227633227065447336876935034e-2,
a[12,7]=.1317645883814256813470498594410812480961187261940803629132333886255198667948156423045e-1,
a[12,8]=.2123393176586337825422136841390852496462355199223689435677885518298790493475203427288e-1,
a[12,9]=- .2504548470127629763146462537418449854581595401019870907778688235386017465098008705307e-1,
a[12,10]=.1142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857e-2,
a[12,11]=.3759398496240601503759398496240601503759398496240601503759398496240601503759398496241e-2,
a[13,1]=.1945888151197554755888010965253177612420737620162731862312147414806601584184678965302e-1,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=0.,
a[13,7]=0.,
a[13,8]=0.,
a[13,9]=.6785129491718125093061216534523674761943647812591653323215344531729041102383826068881e-4,
a[13,10]=- .4297958590492736232710053302301623435688633877248836036755502109954489170536483550959e-4,
a[13,11]=.1763589822602851554074859289533021399375534428299757341489807141089039042639321498044e-4,
a[13,12]=.6538666274150270510095952313851810335495113587873820983519242333986308816206310607574e-1,
a[14,1]=.2068368356642771059168281747982723610789091960434464115982313836045688158444651960319,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=0.,
a[14,7]=0.,
a[14,8]=0.,

a[14,9]=.1667960671041564728280458666646964503063265050947925052155140101473800468812591484420e-1,
a[14,10]=-.8795015632007102144570241782499865911302349902199592087049794487571848499522935439738e-2,
a[14,11]=.3466754553624639108244623152463792094275136540985964036372314865670539326325668110382e-2,
a[14,12]=-.8612644601057176781614325622583512420302704989668912017992248333482802709963824294591,
a[14,13]=.9086518820740502810962394784692621450349571299392567891787847986693969945784247315140,
a[15,1]=.1953463393943401877852935474435846393089401354823872670448334721865874402239863113462e-1,
a[15,2]=0.,
a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=0.,
a[15,7]=0.,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=.8683546743925305180093010091232393585982753619238007947178118517220210576391377706910e-1,
a[15,10]=-.1910980711229365979210093810582855202302004548761465537825767579428021274443925665121e-1,
a[15,11]=.6534823794622940650651170702613944336164176170233570643185464125852679678104744352237e-2,
a[15,12]=.1025884639764455872862208513575978453353584411502716460512719461590059980788878836117,
a[15,13]=.2043599567093374531449412834277318292396567699694610064520072428038446521467600749150e-2,
a[15,14]=.3015728183954446867443200475546570442683793107267960224430156606905222386796666197344,
a[16,1]=.2374874669808506650126522595999130507172823173766455424907875999400287906375039260749,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=-.4982817869415807560137457044673539518900343642611683848797250859106529209621993127148,
a[16,10]=.1343612334801762114537444933920704845814977973568281938325991189427312775330396475771,
a[16,11]=-.3855284423673656176303264340611057853412792364028996696234312892439414031644045043741e-1,
a[16,12]=-1.315722534415037763060562992628845089770682032291867964290503799353910188759960282357,
a[16,13]=1.474691171786536167047103772128107110284194159170193598447502976803894132347990126648,
a[16,14]=-2.186363857316288833697544316228840270262274175740904891538175305844302801928609887278,
a[16,15]=.9590780758127780275954811879594861663408961996996718490668345787682110947714911883363,
a[17,1]=2.083553138719626508247525587413480412041486336504593367733921861188905790691873218796,
a[17,2]=0.,
a[17,3]=0.,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=0.,
a[17,7]=0.,
a[17,8]=0.,
a[17,9]=2.056868999755680098931381768280965089314432490847256988111636852647176490407241749871,
a[17,10]=.6215970772448139207351432357900441632191446367788775697801237591517890531028042308812,
a[17,11]=-.4513176102786270645357954850055907997597231196209747090142051792519402270622334083263e-1,
a[17,12]=-9.223575817358639012588822256975840725721959501326608253500335126132462770358476386417,
a[17,13]=8.070316917335192000933841825553844172445666215348640967034324267144652574264752483834,
a[17,14]=-6.362174826642236803028930139185802971311098466714699884669577414976276618668688400830,
a[17,15]=-1.082770086286099664788184252368387950177314779571295386488813114564680253443675444849,
a[17,16]=-9.295290375792039997783972382912332142207880575118997475070736339961169400050824335694,
a[18,1]=3.255961880979495029108776251737021471207243125872841579605541601947739281585786837640,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=0.,
a[18,5]=0.,
a[18,6]=.1316633083077899368614323951690414312668647200728382264527827130788686729110294170782,
a[18,7]=1.559452296070784420981759080324071365866106166789649899338117387179237025915899302256,
a[18,8]=.5815257048364216745068908293243488546452802574690854130846498244499467720756344927418,

a[18,9]=5.377298457455407968754889058757333163792489946847278353184288647297646058561564488478,
a[18,10]=.2161380004430153866987614903198594587665092264303133658634778430747555065016486353629,
a[18,11]=.7719584073485828317971116353374673364393749835409702951209515798355434548278680407793e-1,
a[18,12]=-12.9213327342674567615481977895536900739725141445245057301899290448233255349755483508,
a[18,13]=10.33718755875676290447775370810362474511816382641082064790077757107598220848230856811,
a[18,14]=.1280638204574762585055630115843668028891465764738484697414825567186225812466452312522e-1,
a[18,15]=-5.608839309906026530453185844628969610944010472899781426928970420986750897852725432876,
a[18,16]=-1.943009352428196108838337767823642877287248991241669204778734219860256733548749791369,
a[18,17]=-1.283526018494045420184287143193446207421464913356123535599232759641139856465371475959,
a[19,1]=1.440511404868138100571841509581624834119951843718332510524214241379130017299733473912,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=0.,
a[19,5]=0.,
a[19,6]=.4995282266455323601977934084206928004058911494068140919558100299611985086558381414011e-2,
a[19,7]=.3979182388198289973417396030013471560834350609314249708263044040250700525391549655752,
a[19,8]=.4279302107525766110681926083008979815582407305803964063123594678423525630853815189010,
a[19,9]=-1.304339546231367387713256093424102146943609934423543632688126277157658167134198897456,
a[19,10]=.6588353074054981585680120069850677901803719118855862845919334052018439603236955395540,
a[19,11]=-1.416958612881212973898361303547683945784151845192979793204621374068179804286424253849,
a[19,12]=-7.224651155157847941792969762120260510931173391318485047058880156264912366661918313496,
a[19,13]=6.883544898584204559185610956813325226924656209353741446595279466225009485431736640958,
a[19,14]=-1.700832864140321560638929113272101872631766326268970098272485293337998314407805271317,
a[19,15]=2.074294075723052913906091486669800417347535942724345721880263601813825689508291009328,
a[19,16]=-6.747439626443064718629581295708377231920798759984050586488916899925211549437997031744,
a[19,17]=-1.156188347949395004907036084359076100596057549353055820457292017095159857577078205324e-2,
a[19,18]=-7.276507276507276507276507276507276507276507276507276507276507276507276507276507e-2,
a[20,1]=.9506739555325826389753974119299981692491254404406186417951964076957905815155174128089,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=0.,
a[20,5]=.2170506321979584863178462569531599428759163537577341676846566744497954872579456743665,
a[20,6]=.1374557920759667598129078018350481905944439909394085308429177535450188051849310154998e-1,
a[20,7]=-6610953172676828444558313414981495316726682520850165659175461032462670124939971157633e-1,
a[20,8]=0.,
a[20,9]=.1521880339447512760838219396331281613277831448746071614605224726345410644794515149620,
a[20,10]=-3377020360834073080732982239648231582395249523614375217294367192863395267744603995973,
a[20,11]=-2336289695808615749172430043985928100423661483646442739564262252766945374826441030601e-1,
a[20,12]=-3.680085001461008097277655732845779932409568018251036359365674000851920985965662992593,
a[20,13]=3.159823101897254334762383114951690002143573651233127409778343340492145895532387373153,
a[20,14]=-3.702065236411917685634106268451378901067530327436914675647768285998744402601246957522,
a[20,15]=-5.147348602758037542430441565973184194317084177157368187824364981252678394750889429481e-1,
a[20,16]=-8.296255321201529467870435417928484166593826752027206775365542784220425091994969746694e-3,
a[20,17]=.2798010414192785989865865890700275839613554026408795032135027653873641738192519718714e-5,
a[20,18]=.459256866593473853358317223412134372973349567553389978447367568890610834385385873700e-1,
a[20,19]=.2790842550908773559156608745553796499662821675601262692902221878625437021870196271539,
a[21,1]=.1033644716500104775703954356904817915433427083303498792441969232007020836692076572831,
a[21,2]=0.,
a[21,3]=0.,
a[21,4]=.1240530945289467610615818892371153282110747849551802980440742772315189064222869368349,
a[21,5]=.4831711675610328992888364804519625087241092575172891773023800341818228904190296838151,
a[21,6]=-3.875302456947632520856814437676205803957333023413680388042903644485548362506013679914e-1,
a[21,7]=0.,
a[21,8]=-4.383138203611224203910597889409601764206828366526006985800905251155989894984839457596,
a[21,9]=0.,
a[21,10]=-2186366337216766476851114850171511993625093736982883305934862323914026063358863684281,
a[21,11]=-3514919408037964524073168174549428377098522133486083034776757516800499239283807148835e-1,
a[21,12]=0.,

a[26,19]=0.,
a[26,20]=0.,
a[26,21]=0.,
a[26,22]=0.,
a[26,23]=0.,
a[26,24]=0.,
a[26,25]=0.,
a[27,1]=1.009212420089486441004682542507685735330777124450122126426089295743588231044770298947,
a[27,2]=0.,
a[27,3]=0.,
a[27,4]=0.,
a[27,5]=0.,
a[27,6]=.5572592995216829736977259733189719022897248397164096966881360391525031280818326706521e-1,
a[27,7]=2.998506792729129115220543529511427312371508514199884266678224383131607979108898828906,
a[27,8]=5.823569846875264494263837768291789187780344793319723440372232581371478668259446132758,
a[27,9]=-3.526077241900087543589513800359510386609516399499532596487923573619283643011243539642,
a[27,10]=-.6501056678777004116217605564238047418528716175257784983452765479249476614546556940494,
a[27,11]=-.2286448810196875498926293386780685128124692374946734976704123196503577838281937704196e-1,
a[27,12]=-1.389226610746707544016765329708014069809043789078523300623809898756418436917796601338,
a[27,13]=0.,
a[27,14]=0.,
a[27,15]=0.,
a[27,16]=0.,
a[27,17]=0.,
a[27,18]=0.,
a[27,19]=0.,
a[27,20]=0.,
a[27,21]=0.,
a[27,22]=0.,
a[27,23]=0.,
a[27,24]=0.,
a[27,25]=0.,
a[27,26]=-3.960432523308141307571882075990131037850466474645282988269567318363901362997071872819,
a[28,1]=-1.386419938608854363631022097974054325357402599352309594879035378132784109617800822315,
a[28,2]=0.,
a[28,3]=0.,
a[28,4]=0.,
a[28,5]=0.,
a[28,6]=-8.962677893643501501909199150237449715295242408259376588181896885408889404920957133632e-1,
a[28,7]=-4.559770324917754841265303455533143369288003514415072309884887378395179075724658626538,
a[28,8]=-8.571467537937878379558804925206429189085862980340701365091124027412232195427883983737,
a[28,9]=5.687535704252445722558778345738258586326784810259260674011270625080300031376998909965,
a[28,10]=.9611628815000175181031617613569035969745108984862223840950463228675486102483589350855,
a[28,11]=.4959883102626965774340464340282146326297940145474623086402614267819324440278679630602e-1,
a[28,12]=2.202521816061562152454496390846320654092150492558884962423700718407460582514944754691,
a[28,13]=0.,
a[28,14]=0.,
a[28,15]=0.,
a[28,16]=0.,
a[28,17]=0.,
a[28,18]=0.,
a[28,19]=0.,
a[28,20]=0.,
a[28,21]=0.,
a[28,22]=0.,
a[28,23]=0.,
a[28,24]=0.,
a[28,25]=0.,

b[28]=0.,
b[29]=0.,

b*[1]=- .9345634104081451953625568985974558422997396796634732858320254397909313557729578454435e-3,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=0.,
b*[9]=.2899214337109885420634409579229090068821061141792854244605530036546367088971852498777,
b*[10]=.2032294942351423538994994390405337923948977184697729527321586102816038112655175866532,
b*[11]=.5143658344516802538475230141000980404902875780840340659292933987691701897033233151336e-1,
b*[12]=.1403050337784732889553941665763127742909476768825711986370562157911322700712818719311,
b*[13]=0.,
b*[14]=0.,
b*[15]=0.,
b*[16]=0.,
b*[17]=0.,
b*[18]=0.,
b*[19]=0.,
b*[20]=0.,
b*[21]=0.,
b*[22]=0.,
b*[23]=0.,
b*[24]=0.,
b*[25]=0.,
b*[26]=.2835111002524267614778150261109464857284169661977675344437239134807145183066676794580,
b*[27]=- .1237024971130524317539707679882662018048639783437543329197552132990868557512652681742e-1,
b*[28]=.1801357627986314015532276303513154749165112121185868589717664364192268134179888462927e-1,
b*[29]=.2688759141965127643453497960158066518573778276437970381420982004277260807811588060017e-1.