

**A 22 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme**

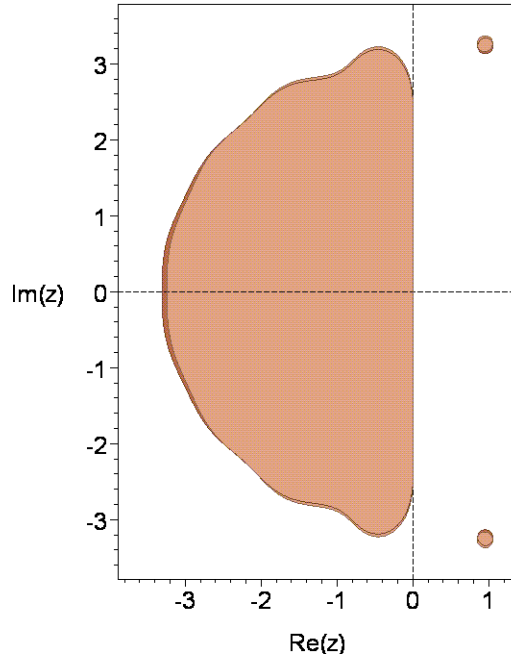
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is:  $0.5818724866 \times 10^{(-7)}$ .  
**Note:** 681 of the 1842 error terms are (effectively) zero.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is:  $0.2878659768 \times 10^{(-6)}$ .

The maximum magnitude of the linking coefficients is 5.643571078.

The 2-norm of the linking coefficients is 14.06104816.

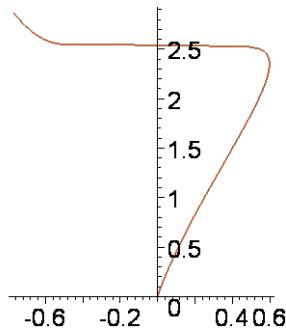
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively  $[-3.24295, 0]$  and  $[-3.3074, 0]$ .

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval  $[0, 2.5341]$ .

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

c[2]=.2205458993880379104355487898143108010523864531672942637371584849002501315035645407686,  
c[3]=.3308188490820568656533231847214662015785796797509413956057377273503751972553468111529,  
c[4]=.4962282736230852984799847770821993023678695196264120934086065910255627958830202167294,  
c[5]=.2224015513417478082534997613501824029368298056428347807321864624200937616100374134524,  
c[6]=.5728951136667406937703916220071502171814080161315014504686695526717982531152373845609,  
c[7]=.3680738786279683377308707124010554089709762532981530343007915567282321899736147757256,  
c[8]=.4623632830770463941438980940713575830229969134462364236605312050627039325625018027511,  
c[9]=.7584988371832548237831533750931820188997986369680239350587504721622028841387701441338,  
c[10]=.2017456840219561278997247068615450782323912200789178251854860087847465744387751367098,  
c[11]=.5265068990559186637618010167029774872912127814088598402323892519970951343500363108206,  
c[12]=.6819366904853318241607062276010434647814827397346079995826104118052270282099632584507,  
c[13]=.7897603485838779956427015250544662309368191721132897603485838779956427015250544662309,  
c[14]=.3828264758497316636851520572450805008944543828264758497316636851520572450805008944544,  
c[15]=.1120391705069124423963133640552995391705069124423963133640552995391705069124423963134,  
c[16]=.8996598639455782312925170068027210884353741496598639455782312925170068027210884353741,  
c[17]=.9849785407725321888412017167381974248927038626609442060085836909871244635193133047210,  
c[18]=.4757834757834757834757834757834757834757834757834757834757834757834757834757835,  
c[19]=.6102040816326530612244897959183673469387755102040816326530612244897959183673469387755,  
c[20]=.9954483386436049157942649066909421939007737824305871643149749658625398270368684569868,  
c[21]=1.,  
c[22]=1.,

a[2,1]=.2205458993880379104355487898143108010523864531672942637371584849002501315035645407686,  
a[3,1]=.8270471227051421641333079618036655039464491993773534890143443183759379931383670278824e-1,  
a[3,2]=.2481141368115426492399923885410996511839347598132060467043032955127813979415101083647,  
a[4,1]=.1240570684057713246199961942705498255919673799066030233521516477563906989707550541824,  
a[4,2]=0.,  
a[4,3]=.3721712052173139738599885828116494767759021397198090700564549432691720969122651625471,  
a[5,1]=.1201423151174748468702876450184049708164263994631656582668751875957239440104589919456,  
a[5,2]=0.,  
a[5,3]=.1572624976246499306824728183805653261471360910192131463585700375486168062408042173362,  
a[5,4]=-.5500326140037696929926070204878789402673268483954402389325876272424698864122579582945e-1,  
a[6,1]=.7223416767986424860259282577883948269685161236137677078983564826349973939572300298841e-1,  
a[6,2]=0.,  
a[6,3]=0.,  
a[6,4]=.1926643028422253485686747464434067459592745540608164780753631786160860914137033780441,  
a[6,5]=.3079966431446510965991240497849039885252818497093082016034707257922124223058110035285,  
a[7,1]=.7571121621832647271204856566916646454119840855688051483267293070195279999134767963244e-1,  
a[7,2]=0.,  
a[7,3]=0.,  
a[7,4]=0.,  
a[7,5]=.2846099368765818436281693282348254481889530471947465334165743804836324564354598279841,  
a[7,6]=.7752725533060021390652818497063496240824797546525986051544245542646933546807268109013e-2,  
a[8,1]=.7847042365717558004332024716084967747270744623619461032502313827329905237905516616954e-1,  
a[8,2]=0.,  
a[8,3]=0.,  
a[8,4]=0.,  
a[8,5]=.2608545829794162921678706632982749462169567029067635414414874712837227528917057167670,  
a[8,6]=.1751899997013529859569186137073709408291363760546509112712940567742234179707844941817e-1,  
a[8,7]=.1055192764703192233370153222414958652504191266978131807668911898282597854946624703964,  
a[9,1]=.9765925542960998879652829642564028980730077918519978264786119911503582405003360933677e-1,  
a[9,2]=0.,  
a[9,3]=0.,  
a[9,4]=0.,  
a[9,5]=0.,  
a[9,6]=.8410360859935459940737538250126400231133826876208451079417689748976952869246952557434,  
a[9,7]=1.175624922304243350575671309852334020482597836601499944814290462803072367532688269724,

a[9,8]=-1.355821426544144509662800056197432314503482666439520900345170164653600594368646990670,  
a[10,1]=.9219004639218578562278736944699328275189490972354874291282609171894244476534391288347e-1,  
a[10,2]=0.,  
a[10,3]=0.,  
a[10,4]=0.,  
a[10,5]=0.,  
a[10,6]=.4271608588060012316968358345038877514419761434286820497622419684760911635448967969505,  
a[10,7]=.6811842656724960345293350008075311960966847304340414172505430487531771711787846857112,  
a[10,8]=-.9539105233172461590475061739171038741837704506736084290147082934052414464248573870262,  
a[10,9]=-.4487896353148076490172732397976327787439411283374595572541680675822275862539287180917e-1,  
a[11,1]=.6365553896739120871935278542993984503667758239144084523939270800815416745497558363626e-1,  
a[11,2]=0.,  
a[11,3]=0.,  
a[11,4]=0.,  
a[11,5]=0.,  
a[11,6]=0.,  
a[11,7]=0.,  
a[11,8]=.1764262162223118245505060472073583667171567295526819813799552696098656394723010494230,  
a[11,9]=-.1352994128131900952819612931602210320208659490400242327802086032043616417564909289078e-2,  
a[11,10]=.2877781379943475314447617969972814858575871289551372559408433604111189438403245870505,  
a[12,1]=.6085858571531379619173067688935326856339181136328339151055327334116040637564880277059e-1,  
a[12,2]=0.,  
a[12,3]=0.,  
a[12,4]=0.,  
a[12,5]=0.,  
a[12,6]=0.,  
a[12,7]=0.,  
a[12,8]=0.,  
a[12,9]=.1817507798606278842619542127434040231409523609172457135317214409965591057832927219217e-1,  
a[12,10]=.3039142271229217443060674165108215331486381502105029141398658289274841035656395613644,  
a[12,11]=.2989887996610334952367127129265282607553575420690971225790191654369266076903456221235,  
a[13,1]=.6084840922910355458957233400086751313770713205592431990210730469660518896658591373394e-1,  
a[13,2]=0.,  
a[13,3]=0.,  
a[13,4]=0.,  
a[13,5]=0.,  
a[13,6]=0.,  
a[13,7]=0.,  
a[13,8]=0.,  
a[13,9]=.9224822105088808067128276126614528512862366808682080951141687219436080562227802453333e-1,  
a[13,10]=.3039741236883816203846708961825867328811618159463104725401275713708832216108968759834,  
a[13,11]=.2979362739618666848979903795920752103585802141150386067957317543363484619536416898888,  
a[13,12]=.3475332065363805509918515401279148943074634190919555159920037539744502337165196209148e-1,  
a[14,1]=.6228406467868914234859950590357317117873236300600260045189470173026293386679245187912e-1,  
a[14,2]=0.,  
a[14,3]=0.,  
a[14,4]=0.,  
a[14,5]=0.,  
a[14,6]=0.,  
a[14,7]=0.,  
a[14,8]=0.,  
a[14,9]=-.2450277606742292871307626602916180493530694731720278550882944507883676082471795641123,  
a[14,10]=.2920842539164268876543655612257258843712645400004688825101066452974970178139478161735,  
a[14,11]=.1058221079446380689732248849344607514209901757549766520117925613982401019000973001658e-1,  
a[14,12]=.1205481371513304879779745326752127093462910504939351807282016800581022064340369329583,  
a[14,13]=.1423555699830506259376526292387407102091368849225993759285758527147386850228935275391,  
a[15,1]=.5738838099127904132211314558553939065338602172552190085824416881749290203785932708397e-1,  
a[15,2]=0.,

a[15,3]=0.,  
a[15,4]=0.,  
a[15,5]=0.,  
a[15,6]=0.,  
a[15,7]=0.,  
a[15,8]=0.,  
a[15,9]=- .6005789366818756132899589635406380788217942743524098961841024373299056833404133402806e-1,  
a[15,10]= .1125283600555217877751454200872608473004136309815739821229930835240077719349871090352,  
a[15,11]= .8814059956078761449760832498279920350747922795101700886310603882181876594988325164958e-1,  
a[15,12]=- .8653932200731491369901349651018928143836526834840229719878922448155660506343010618442e-2,  
a[15,13]= .4476853876356286429285541987280155448407393925249256597500585474420478412962903447039e-1,  
a[15,14]=- .1220748829953198127925117004680187207488299531981279251170046801872074882995319812793,  
a[16,1]=- .3413226464889072973702796440254059494962083842598250378374678382859858631408367387092e-1,  
a[16,2]=0.,  
a[16,3]=0.,  
a[16,4]=0.,  
a[16,5]=0.,  
a[16,6]=0.,  
a[16,7]=0.,  
a[16,8]=0.,  
a[16,9]=- .4208724087308422015352249645290189745383507173653874590394009246127252409188086434765e-1,  
a[16,10]=- .3917866407926354947387520656184525717166679151044423770335920816188946297328464378001,  
a[16,11]= .2082540586097348625168708261733797268056247070112869728981102765472274444038465419014e-1,  
a[16,12]= .2136501710046071877524687194147709868734009720820487387399581738939575642962349054333e-1,  
a[16,13]= .2954523371447027820223368129436848718430011972897123972375484009025040966199859760842,  
a[16,14]= .5221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672566372,  
a[16,15]= .5078993563487419543592744294909303686366296079578700994733762434172030427150380339380,  
a[17,1]=- .4053986319634733993873965906443890217307058876807604480668104663911554035820821640071,  
a[17,2]=0.,  
a[17,3]=0.,  
a[17,4]=0.,  
a[17,5]=0.,  
a[17,6]=0.,  
a[17,7]=0.,  
a[17,8]=0.,  
a[17,9]= .2652532536351027951804928053113379848419861173189662181358619660717079879909959681505,  
a[17,10]= -2.242538464948548254199975619712847326502799534754437587351651153253913404478058026931,  
a[17,11]= 1.927916323955001945720357491333087526447015225232907844439726912262631657123818436701,  
a[17,12]= -3.030472994250914812031517045210661723481415471527538442700002329001550319490152411736,  
a[17,13]= 2.00878378728028905833837386038973146734302292490094463380811555636119109301189591139,  
a[17,14]= .5466934051596822405983443392467120422555033184689412186327113065306631223665833686556,  
a[17,15]= 2.197141209191539275341122233500908451139266401428334024511442269253589197967203822400,  
a[17,16]=- .2823993472861466607185997574756819754191692307264130849735063701209674836801852796506,  
a[18,1]= .1704581989892381874147553364673619695086062675327230198561569257433018077023759721186,  
a[18,2]=0.,  
a[18,3]=0.,  
a[18,4]=0.,  
a[18,5]=0.,  
a[18,6]=0.,  
a[18,7]=0.,  
a[18,8]=0.,  
a[18,9]=- .7757017861663908420908850381379832574708896690543227521898227036120451687787373196327,  
a[18,10]= 1.085327418491937284078231905912957529300052585796047016608113765410675130697770116129,  
a[18,11]= .2498293509371928639184723688927182756359207995241270036148990689679289278350580974213,  
a[18,12]= .5355939524912323082868792844397832519876904304731081900640606318966381697498264482800,  
a[18,13]= .1928482686479831848350659029224905418652830428207303236276054376336082347014848099178,  
a[18,14]=- .5082833784295887565289613789675136995147666986986974483992114343498455542722100600619,  
a[18,15]=- .5808402086197423980712295078252824162381936650897148405582419994599051840668008976382,

a[18,16]=.1380486740397565684502551441300929178663779898688382537289115603259083959170329112195,  
a[18,17]=-.314970145981426168168005420511493294642976073893629828766877677278897601001660196934e-1,  
a[19,1]=.1101386138871547648987632685399734829865369058388862718458970914811404927233931929181,  
a[19,2]=0.,  
a[19,3]=0.,  
a[19,4]=0.,  
a[19,5]=0.,  
a[19,6]=0.,  
a[19,7]=0.,  
a[19,8]=0.,  
a[19,9]=-.3379130070642371853767033628676126784285854206137600012164653455217529309932993669804,  
a[19,10]=.6212407654155565833798013998443242285361762167120293985922768107520664803775961662156,  
a[19,11]=.2475288708070262905021051966781214185778275654858433595416567451808047503042841496582,  
a[19,12]=.3991320608153117957770176950014172466600373387119456881061069683320865833525537752042,  
a[19,13]=-.7753838866816648086431338542836528704492120448708015360312822985395315810058433839729e-1,  
a[19,14]=-.1160118525455842779196924848862090020412189901298844367584480266992104032145532934420,  
a[19,15]=-.2506178223931826646652479677787627012263410493179314478451196086167238028905345138372,  
a[19,16]=.1337710242242982919032244215723154263436746008268003666780918641452112638134297735833,  
a[19,17]=-.2967750030104429740207110634838302709175177565486941520132906614658254742592698517890e-1,  
a[19,18]=-.8984868254447975900839387840845176033265867716789799748647797856329080957901162096809e-1,  
a[20,1]=-.3757520014635877886382025691259216605716597798426555739387875180677074703676189623992,  
a[20,2]=0.,  
a[20,3]=0.,  
a[20,4]=0.,  
a[20,5]=0.,  
a[20,6]=0.,  
a[20,7]=0.,  
a[20,8]=0.,  
a[20,9]=-.1146126550412399561120719590623940337467673799182969278866309126033166940409327738399,  
a[20,10]=-.1.635840160458966340617362545697212113789611577579671166231806731718400173712085901841,  
a[20,11]=3.051083513143516561729380711081590396800179429572732586784227269688168750505492853549,  
a[20,12]=.2197537299632279941710966755250736376672253180486151168313452898125985448491566400173,  
a[20,13]=.6054313099041533546325878594249201277955271565495207667731629392971246006389776357827,  
a[20,14]=-.8367894795887235755937948200178774330985789402552964769246613762094711603537000185967,  
a[20,15]=1.909821679076190285191170819938534597268539048199384112034791376451269422304328690367,  
a[20,16]=.4867247338880583116215354674979668445790460915786649833326193617227270559805266983420,  
a[20,17]=-.1875181138861305002003511663740153070307850494855049273553734876534166174097512863082,  
a[20,18]=1.272158174410379093554970804339271828081664859999200979425283564416583713359900764609,  
a[20,19]=-3.399012391303272523944694370838994690054005394436106308529194809273620144717425882695,  
a[21,1]=-.3365874277820512698945785258791848488913241736278109396997088468971165145945752605433,  
a[21,2]=0.,  
a[21,3]=0.,  
a[21,4]=0.,  
a[21,5]=0.,  
a[21,6]=0.,  
a[21,7]=0.,  
a[21,8]=0.,  
a[21,9]=-.3791407971534794045249349550430993605750021131231225124768032969692096896839916076884,  
a[21,10]=-.1.148795467510843149453234143482453429192808233120553082657288429064482713450136589234,  
a[21,11]=3.657819588144247466089862225342623367080037909847100856474390731826612259241991131423,  
a[21,12]=2.50830833689806286391019818171291622854661038367623553553884319659479542393311099795,  
a[21,13]=-.4060160053579856633536357514236867690652924781090216750660588251269308885823436630703,  
a[21,14]=-.1.720224935680788072997232275033180251106355263910908410385741585373652287661238528800,  
a[21,15]=1.634698270878402110237711824796851819480597970891793007215992790448123818150459766115,  
a[21,16]=1.003057613459914874426178132680098137103074447983340328349549303328317270014783480702,  
a[21,17]=-.2996948798211975393622230529231353496466042106656323407921626070464898928028154668473,  
a[21,18]=2.092915877897161881889604457108146260348612126986018921603140661790847944128178233570,  
a[21,19]=-5.598655739005425698058163757778151573289275052900648068943354615644842395683445506337,

a[21,20]=- .7684434966018398909552360077744230792271313926791619175839600930656451470177089085642e-2,  
a[22,1]=- .3351969454766412647741448497236267551119035861935372812186418496161593540976647136395,  
a[22,2]=0.,  
a[22,3]=0.,  
a[22,4]=0.,  
a[22,5]=0.,  
a[22,6]=0.,  
a[22,7]=0.,  
a[22,8]=0.,  
a[22,9]=- .3857146209714337724419297021011335599524657928334408933822415786110042732738986630795,  
a[22,10]=- 1.136241184810264801420312075594543875669710609753750124494275536825583428046733419815,  
a[22,11]=3.665080729405987196770832968227396911230227446075746770386860037856956444652682180007,  
a[22,12]=2.560148873081775783797101848801913333754553141541272059013220413381331410653713434015,  
a[22,13]=- .4279325590862239304600179072014953476375633899595884261785479097501091739923683501056,  
a[22,14]=- 1.738074464143749436652473005246997722965399815697335531703939205082317830074990364448,  
a[22,15]=1.626523739943874536955478698437231373899781206278287713882949535735652045876430466743,  
a[22,16]=1.013304889668693672476253125292709345438232269733777203091176985527244292467754947487,  
a[22,17]=- .3018862460143904799855703897555146425350434648973104749739263666839486484275254215957,  
a[22,18]=2.111313636713134799514651988428441601607650985161973098456182206660742450211834564231,  
a[22,19]=- 5.643571077693098701442643046602034501946228152276676962232547108326382111819516869061,  
a[22,20]=- .7754770617663602337227652962346160112130237179417150646269624266421824129717790738292e-2,  
a[22,21]=0.,

b[1]=.3126615217034188640144848371594953894730152036489098587031767179977627453479557176579e-1,  
b[2]=0.,  
b[3]=0.,  
b[4]=0.,  
b[5]=0.,  
b[6]=0.,  
b[7]=0.,  
b[8]=0.,  
b[9]=0.,  
b[10]=0.,  
b[11]=0.,  
b[12]=- 1.062612784957396172391652443036029916356983119832253693579508447988741780299102213125,  
b[13]=.7108402557267675730694733013790934211890212409569663517804709498903138400671576992671,  
b[14]=.5395569745335460382193676841243992144554275292305253833656306651338018114258898974975,  
b[15]=.1841372422882441262193437973466985586579863401075684131794464040454594336300672628710,  
b[16]=- .3159798742619422987980376356778950476149762854274947949146324907501892421437429682711,  
b[17]=2.600431012563016510837610773968118921954412332054164057311761592326577560194920532508,  
b[18]=- .5653836599483898869765839640056962744058977268692275168213930295179517791035688309461,  
b[19]=1.221016296139797255718109888062168814148177029669738332034275423316596515640653938230,  
b[20]=- 5.747851766925740757489919580533295780592789470941900418989727516881596832420353332546,  
b[21]=3.404580152671755725190839694656488549618320610687022900763358778625954198473282442748,  
b[22]=0.,

b\*[1]=.3133144299170622573122929270527386634804539459298850075137214627505078365150063445984e-1,  
b\*[2]=0.,  
b\*[3]=0.,  
b\*[4]=0.,  
b\*[5]=0.,  
b\*[6]=0.,  
b\*[7]=0.,  
b\*[8]=0.,  
b\*[9]=0.,  
b\*[10]=0.,  
b\*[11]=0.,  
b\*[12]=- 1.164211525155477300845859176994686735943236505301876504423023679539518550356134784951,

