

A 22 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme

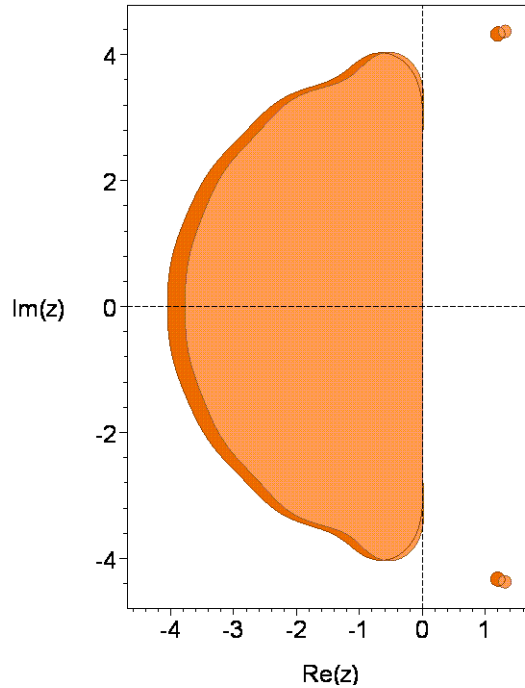
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.4819731144 \times 10^{(-7)}$.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is: $0.2535650748 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 46.52264449.

The 2-norm of the linking coefficients is 97.78386946.

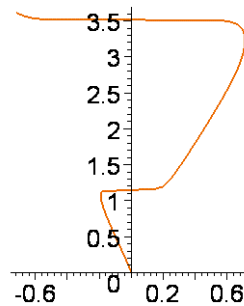
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively $[-3.7726, 0]$ and $[-4.0524, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[1.15965, 3.5165]$ as well as at the origin.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.2299259329286696285159940004114097502852257464855947647656524269595363844662697947697,$
 $c[3]=.3448888993930044427739910006171146254278386197283921471484786404393045766994046921546,$
 $c[4]=.5173333490895066641609865009256719381417579295925882207227179606589568650491070382319,$
 $c[5]=.7678322453729815385858513272711719036004569604249177902134532658811508797165085795390e-1,$
 $c[6]=.6743446945811514299920345862079194436823069699477332999096195901263133013415643432442,$
 $c[7]=.1170909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909,$
 $c[8]=.4337982051849753352492044911284540123632931321244388301743851265420763556193390711105,$
 $c[9]=.7116383290975066636449936606806028402442838170978575815718533200889350544402161908256,$
 $c[10]=.1892817159920465629061116687816141854508850751318916347992750557354597795252913512488,$
 $c[11]=.4939789905201127337945170381757622341788367922111196515500896746092749167307199590059,$
 $c[12]=.6398062372375365034373190887942946977076548156522789561839754556419298354777104142622,$
 $c[13]=.7409684857801691006917755572636433512682551883166794773251345119139123750960799385088,$
 $c[14]=.3982074263764404609475032010243277848911651728553137003841229193341869398207426376440,$
 $c[15]=.1047565118912797281993204983012457531143827859569648924122310305775764439411098527746,$
 $c[16]=.8624113475177304964539007092198581560283687943262411347517730496453900709219858156028,$
 $c[17]=.963996399639963996399639963996399639963996399639963996399639963996399639963996400,$
 $c[18]=.3139717425431711145996860282574568288854003139717425431711145996860282574568288854003,$
 $c[19]=.6323930846223839854413102820746132848043676069153776160145586897179253867151956323931,$
 $c[20]=.9673219978746014877789585547290116896918172157279489904357066950053134962805526036132,$
 $c[21]=1.,$
 $c[22]=1.,$

$a[2,1]=.2299259329286696285159940004114097502852257464855947647656524269595363844662697947697,$
 $a[3,1]=.8622222484825111069349775015427865635695965493209803678711966010982614417485117303865e-1,$
 $a[3,2]=.2586666745447533320804932504628359690708789647962941103613589803294784325245535191159,$
 $a[4,1]=.1293333372723766660402466252314179845354394823981470551806794901647392162622767595580,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.3880000118171299981207398756942539536063184471944411655420384704942176487868302786739,$
 $a[5,1]=.6338362674956028846336107082909723078849452368382111220037283696303466486776394830087e-1,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.2310440853168854292951605846042068373368805076577320846498381295792462527880167833630e-1,$
 $a[5,4]=-.9704810743950677534291996562400724162136878407102541644011323332844202174914768683271e-2,$
 $a[6,1]=-.1530743550647681748710845505615630659800046944398247619882229086002809790252417823166,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.3718952095315015918645969946698035524546842151849126324805821753825336943453718662000,$
 $a[6,5]=.4555238401144180129985221420996789572076274492026454294172603233440605860214342593608,$
 $a[7,1]=.2798088348724162105603959096054488512594727238734695505748198271535562510136713307729e-1,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=0.,$
 $a[7,5]=.8908829496662350376696379591857212428042219907663991755228995420453728077651678063147e-1,$
 $a[7,6]=.2173063704396608608752221179208150272143762692221829931897217101618503120699538215204e-4,$
 $a[8,1]=.7017989751054622579015444047695586156744601858256518233524472959913073429758706639861,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=-.2.840488996253996235837989772749472822621922810681373161421172214617696943414340343106,$
 $a[8,6]=.1969903308820059392125038503517303280802660818689066702338667671320609846599850405432e-1,$
 $a[8,7]=2.552789193245308719264399474073195186502729148793269501219723368455259857591810246176,$
 $a[9,1]=.1514452350583062649968992807316989554912295683242417463743189776678019268909150824728e-1,$
 $a[9,2]=0.,$
 $a[9,3]=0.,$
 $a[9,4]=0.,$
 $a[9,5]=0.,$
 $a[9,6]=.1194811127852445611833827097570616535514586889527223536516419839850648996337786144640,$
 $a[9,7]=.2452231769057462160175113083286364669036929917188126773013970604318426760956373405625,$

a[9,8]=.3317895159006852599444097145217348242400091795938983759813823779052472860217087275519,
a[10,1]=.3977397669793772710671799624407365518557960687713174883317803240967634383665896703600e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.9109534815578336799673616021998028920735149478010200286036315304885278160449541900699e-3,
a[10,7]=.1481895385653755919551925333786312483750007763027850600878573118031120829876728266382,
a[10,8]=.1230827199930105693488798665325287275793554582103687098115161155752572043760834982064e-2,
a[10,9]=-.8235799527546955292550211086158082775623775779298812484790811635697471588462315975979e-3,
a[11,1]=.5972286201094201801119423909649990802289792986028822272129243365817492835496891270914e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=0.,
a[11,7]=0.,
a[11,8]=.1655264999320069906540002941909366284217247020924010970724420745334250230669159090238,
a[11,9]=-.1269405348330018831137450876564169977776717888996448618805811591326631965816111325705e-2,
a[11,10]=.2699990339254937439604599557648898677119917781474267803751609780090015972746512485987,
a[12,1]=.5709870618986813810857901982516043756443129714496579700924714712799871074552006075903e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=0.,
a[12,7]=0.,
a[12,8]=0.,
a[12,9]=.1705221088703356754044739107590456965057457909814078599287804634660732845091430579661e-1,
a[12,10]=.285138225896137022944836038459630032498029238310143364386972933308965648902646358065,
a[12,11]=.2805170942644977748434566394335996579946197010990290087948773288364272313910114119001,
a[13,1]=.5708915841301242952757954477323619230431784773214698374832056349849734176506998598497e-1,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=0.,
a[13,7]=0.,
a[13,8]=0.,
a[13,9]=.8654907123478015188975379379045063729772405557610140636512749755587901471764020500604e-1,
a[13,10]=.2851944220162534832332214253423864872502848327231777627769948575788447599788029496623,
a[13,11]=.2795295942273602232063891249709943455243937317623384082918671658018608965016821233009,
a[13,12]=.3260623988876281283483166838657568889153472052291491614282442747883036213288467455462e-1,
a[14,1]=.5758329607619059165539056108516522662793870522670189322267036669930975931394974184650e-1,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=0.,
a[14,7]=0.,
a[14,8]=0.,
a[14,9]=-.5166667066500325207091798709399076116949877103407489857900847744955691727994100698164e-1,
a[14,10]=.2812662330188023076323255308680929110008677326991370968667734874436697323867171312714,
a[14,11]=.8435682869043473606107920328210651137042866256660735736171950199248952336855347980491e-1,
a[14,12]=-.1367654160096854561324803449580541953518726302194354447430893477135501545308786312255e-1,
a[14,13]=.4034428085698462328287392737875931659661610641888579598627697541962985748455115482541e-1,
a[15,1]=.5418685949963822099783086022284535845491250113187597495379769897929142883900151606430e-1,
a[15,2]=0.,

a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=0.,
a[15,7]=0.,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=- .6838519139938432315413365225769245547979536114109078448879467702512880663205853687861e-2,
a[15,10]= .9903282172187437352691960547646068417381415142632822943294049996614999406972881270611e-1,
a[15,11]= .1617840360618338235092970363458851284086139283835693990838045462316730016258708078462,
a[15,12]=- .5740462524908702065354231443454556452863121385638384041122585830503435339636096736510e-1,
a[15,13]= .1913355367585784570303601536591067655732267975632640963665599672911017089726819776148e-1,
a[15,14]=- .1651376146788990825688073394495412844036697247706422018348623853211009174311926605505,
a[16,1]=- .3285345488445622854833092244891762196839811694317633848329123141540418632002084955453e-1,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=- .1122676774780272351927325302541870406705598721815067820788376646340149783209563205021,
a[16,10]=- .2805188511089630860281507677511412164793748547673224471909431020628830467715971610913,
a[16,11]= .5433876043908345052926961314282396465948305953953520953850114480993402630138653897062e-2,
a[16,12]=- .7028827188915490199341726665219436469533089919800735816743169182694814807186099678907e-1,
a[16,13]= .4099489140369274611044428972085427698782903215751045563238733855200872894642131119123,
a[16,14]= .4928057553956834532374100719424460431654676258992805755395683453237410071942446043165,
a[16,15]= .4501510574018126888217522658610271903323262839879154078549848942598187311178247734139,
a[17,1]=- .2572906111145614496264261726803123404381732950353802468222834659788374045269665915769,
a[17,2]=0.,
a[17,3]=0.,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=0.,
a[17,7]=0.,
a[17,8]=0.,
a[17,9]= .2324669762715836293440251527087623281098439995515825566417516102576339584105521533170,
a[17,10]= -2.360778449895501914531825134021770373144939271598300212206818433722915571055783807597,
a[17,11]= -4.897488959848112138149093061091995777159415985724731038147985674251579706972331719443,
a[17,12]=3.060872543479206540036041186867905516516197173998993665679869006659103518991101679120,
a[17,13]= -1.537502968460853669598882076290267247009437122604988116509125327274246611392332074360,
a[17,14]=4.478244124748099786819875889551491308305173834483501859429666566838515775984403005662,
a[17,15]=1.812956470194948398076556475834388074228184171979015714860793312503371027511302457490,
a[17,16]= .4325172742651548140293677031181981505565628945902698134737723689653546530140512970285,
a[18,1]=- .1694294943829555099019042634490545439911471747534406136241161298071382434631147593481e-1,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=0.,
a[18,5]=0.,
a[18,6]=0.,
a[18,7]=0.,
a[18,8]=0.,
a[18,9]= .2165424306323550176212677879241174192607573715875027122664095994641428433362893121193e-1,
a[18,10]=- .2575767672808663974463953149195079268402787130413563611966234842761689183086944965526,
a[18,11]=- .3690566871315576719100783191915911691901885315093018272581106087951791698704119171196,
a[18,12]=- .2116115862729904078172840259096523227506887772835136002045432271632838220122836850248e-1,
a[18,13]= .1012152291253861293864836439354072763761267202320258889956959461532813932387250581087,
a[18,14]= .5046579137228568520996502584229203419679609012298662876726562398566689917845591369670,
a[18,15]= .3979275172001186426649522498874889346628460629444586705229088100303440214291157834133,

a[18,16]=- .5808204168158641961658539125972485264180402394123450814449719058974459407878710537404e-1,
a[18,17]=.1133644359117906943145095152592316929884575610222954273530986305745445547623333918292e-1,
a[19,1]=.599289554687269087335019227277764357260360417894741429787820417299381411329804772670e-1,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=0.,
a[19,5]=0.,
a[19,6]=0.,
a[19,7]=0.,
a[19,8]=0.,
a[19,9]=.1302471556313737281309167371246571430572136139267663986213579213215911908114101579029e-1,
a[19,10]=.2698652739872253384889097177674825965849049309620875473902228151528690123329733909926,
a[19,11]=.2860103482796660744980506431114097658482294611648636085585661388071786621415449633021,
a[19,12]=.6092859890947502609634984414627867539327036286186951884365322714518703820219904216928e-1,
a[19,13]=- .6107520393456642273852164090796461384926147466081164221430054662525093294798793874057e-1,
a[19,14]=- .9277532217297518984093544852395514541830426293710301933172664188251841061599732552202e-1,
a[19,15]=- .5758890373812460320324444516349671560363357082739986073512032982779883169264782739938e-2,
a[19,16]=.2341241989215089832095603505245490902150447362246703411548134252105665922501646318263e-1,
a[19,17]=- .4299612861642311040369674531964156655541419579809049287841028691945395379265190652199e-2,
a[19,18]=.8313180186499875043060165403697756756160392699292954985400141996897570373153794688427e-1,
a[20,1]=- .2710268888815580199318481332792154731674882878025174707917061248598141045491310463645,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=0.,
a[20,5]=0.,
a[20,6]=0.,
a[20,7]=0.,
a[20,8]=0.,
a[20,9]=.2741490340386384544618215271389144434222631094756209751609935602575896964121435142594,
a[20,10]=-2.431108410353883205533471172139411782555280177150973369173293730137803161894700413414,
a[20,11]=-5.236044736592893204332620826530833184706822561087682455377596144920853568304345359153,
a[20,12]=.7194752774974772956609485368314833501513622603430877901109989909182643794147325933401,
a[20,13]=-1.315978456014362657091561938958707360861759425493716337522441651705565529622980251346,
a[20,14]=4.888416199249508737015644160296056259370969252455152121408909168250286708655367219602,
a[20,15]=1.883065662521256566350600553175477692727927218781818316390507310187834849815805139737,
a[20,16]=.3399075448232947597520603732705322436627260659455372147095895449955269736219087188051,
a[20,17]=.2322854311673957977015068475255263142328910270581016907051311545511228747435648773479e-1,
a[20,18]=- .1603110571544814276382548950160179551283889737592867039591677124199127882117493566945,
a[20,19]=2.253549285624864609295489685188180825353019631315098740408400368984647753469145357108,
a[21,1]=- .7641622784253742226931281582271667268607727494677510588088930551899445543438022073482,
a[21,2]=0.,
a[21,3]=0.,
a[21,4]=0.,
a[21,5]=0.,
a[21,6]=0.,
a[21,7]=0.,
a[21,8]=0.,
a[21,9]=1.102286401925391095066185318892900120336943441636582430806257521058965102286401925391,
a[21,10]=-5.315757818353148020440552365878139977217057310969497788765088559861709386419724601040,
a[21,11]=-14.40222417239015057629939368135646190711662764488313042617807630541832684385083390101,
a[21,12]=-44.51531717884562431458990489935358720164050951820187320868107421200468045995159486815,
a[21,13]=3.034653465346534653465346534653465346534653465346534653465346534653465346534653465347,
a[21,14]=15.86147645519326915284548020708351512540627819736489911958583894773294481336277892323,
a[21,15]=4.434138285835367690707087462720900243903466006645873704412778358490304483959442891456,
a[21,16]=-1.679569044084090209098999427689794381494732642123876662592007487314158943866130350758,
a[21,17]=1.356895435246551338092174262001811871543824929352112389638627142631694955320396767887,
a[21,18]=-3.813441429150771922732412348203717399571062962896142756037521002394727232209324197336,
a[21,19]=46.52264448717734443146391390268940223211868871889017957063701788346369911608508639589,

a[21,20]=- .8216226094752990957857968073331273459430919306939099674832057658475263969073502435589,
a[22,1]=- .8788114997927994815384873770733664615120792373078984011406605514112868650191109743218,
a[22,2]=0.,
a[22,3]=0.,
a[22,4]=0.,
a[22,5]=0.,
a[22,6]=0.,
a[22,7]=0.,
a[22,8]=0.,
a[22,9]=1.186329909379933921610324810495744830193401669448511215175308840696260843931444778615,
a[22,10]=-6.185122277463612722982674931156775174053761031326009411036263454203862085467849647551,
a[22,11]=-16.19570500499910690631581082838779274000226935237024645859190825732066211954936143058,
a[22,12]=-43.58269833974592321818942086702601127553417450364317390700951360734416617849765142074,
a[22,13]=2.603057340620595906170141783807794617132716730398383466806855933661991705369354276706,
a[22,14]=17.62233280746185176935946158458427620775828856802748434758500139889620357824389848871,
a[22,15]=5.069241163633625474813475936292133391304704241802796115142991274114815479953289085188,
a[22,16]=-1.633181650850628407346358516227559884730185973602632232289924698863906725395822481008,
a[22,17]=1.407715531448482652757053492145303862508320896200611464619878434292826563879410326065,
a[22,18]=-4.014548408965774276369865304814222505802743940614168569964110006948014616391849175169,
a[22,19]=46.47309128081051915212609342590529980346725576379755663115223732948875943814835284637,
a[22,20]=- .8717008515371638640939332085448246707294738308112142604498926350589590192041046722902,
a[22,21]=0.,

b[1]=- .2969034260152760047909133481300228283897273857349788204085662817975391439533126958353e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,
b[8]=0.,
b[9]=0.,
b[10]=0.,
b[11]=0.,
b[12]=-1.788772643003775020512484536399404046066202307544389312653500971776023156439666496140,
b[13]=.1016976991095229931216390207694644981742829492400378294328149307877141355280214032866,
b[14]=.5294782055680755774574245752394670467913397567883849507641717417529211132730702098860e-1,
b[15]=.168855393495804022943174581697519854430226197546103827468427143363255550276330058267,
b[16]=.2086333224789975620221050528981917697019912383042869485486305149898339535540288126077,
b[17]=-1.713533523940238909812554113811601129760174269496134034517879628131866161829636996951,
b[18]=.2177488098642991858809017555880431149131835619122081412935470614699267970264070664438,
b[19]=1.985029214337295145120223668130153644323057120915118264153838012558539850948847092948,
b[20]=1.809679062202669510791640104977513322079464476340569784577982365624001790660808985265,
b[21]=- .7197549770290964777947932618683001531393568147013782542113323124042879019908116385911e-1,
b[22]=0.,

b*[1]=- .2966354179093443613871964046757119851422463150392458255021347642985240213646180094093e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=0.,
b*[9]=0.,
b*[10]=0.,
b*[11]=0.,
b*[12]=-1.759209291244688022755005553922699345364704941211695389665866445529679472570834300030,

b*[13]=.1079217696487580984998282995945207890161455435145083010630952721588626809733243994139,
b*[14]=.5499330375153081071207276406102363126356084508505760098939495977969760758313743177168e-1,
b*[15]=.1689787016165975866326176196818214830211502024330357190522895106829910288498987206646,
b*[16]=.1937407426730158877475763332116057048194582054485259567499255907097948859553748687737,
b*[17]=-1.317098252888679251505047871076177065402414496536080884781264553859823884777145160341,
b*[18]=.2165847548753297114513016000223485152708004195825595392249362879852509201501260025917,
b*[19]=1.953084547840579098041752060145385148499888490833390729574059864688872510225865056710,
b*[20]=1.403971760883990066088816686761968361414522678294142266295847615901549742526422758451,
b*[21]=0.,
b*[22]=-0.5263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894737e-1.

Version: 29 Dec 2012, Peter Stone