

A 22 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme

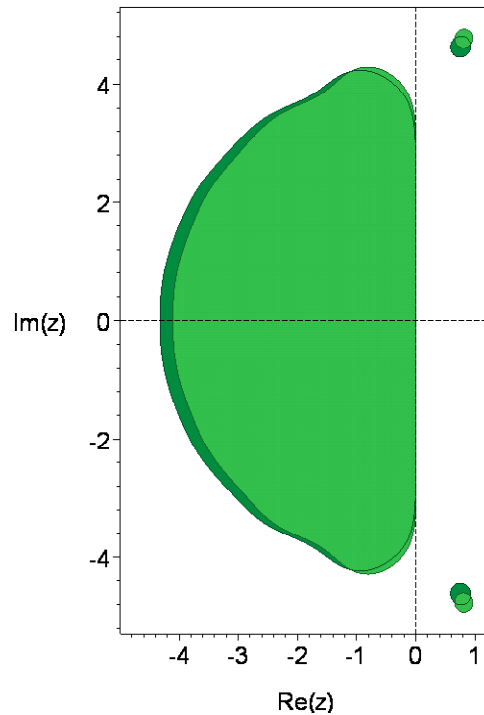
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.5634704582 \times 10^{(-7)}$.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is: $0.2934413070 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 23.22191654.

The 2-norm of the linking coefficients is 58.58204383.

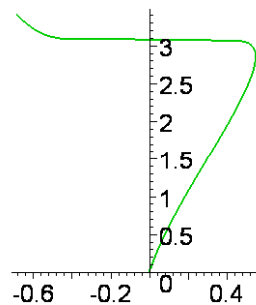
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively $[-4.1068, 0]$ and $[-4.3246, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 3.0847]$.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.2291366754583519236030673645133762748730054354355653295828735109480807124394160800758,$
 $c[3]=.3437050131875278854046010467700644123095081531533479943743102664221210686591241201138,$
 $c[4]=.5155575197812918281069015701550966184642622297300219915614653996331816029886861801706,$
 $c[5]=.8011283409671385829739705444862794551302322176907292108005978638144939325594497323494e-1,$
 $c[6]=.6711457549254428878153727445368507986083723128809954484239440715715083137460070648228,$
 $c[7]=.1222826086956521739130434782608695652173913043478260869565217391304347826086956521739,$
 $c[8]=.4333519183716674404460756307951503669426943726673830593797710202712401945912924823840,$
 $c[9]=.7109062034263429114415175047350423107363112361079442704182919960375966069037792143363,$
 $c[10]=.1890869850484007264070787738150146294274392186893659901991585923273904033137336981283,$
 $c[11]=.4934707903780068728522336769759450171821305841924398625429553264604810996563573883162,$
 $c[12]=.6391480116309333142809830523445576575622183140346018672120703946970614429319073199617,$
 $c[13]=.7402061855670103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742,$
 $c[14]=.3912310286677908937605396290050590219224283305227655986509274873524451939291736930860,$
 $c[15]=.1062742333450828339795558688755727881565033486076841734226295382446246034543531899894,$
 $c[16]=.8700290979631425800193986420950533462657613967022308438409311348205625606207565470417,$
 $c[17]=.9639303482587064676616915422885572139303482587064676616915422885572139303482587064677,$
 $c[18]=.3229357798165137614678899082568807339449541284403669724770642201834862385321100917431,$
 $c[19]=.6307803468208092485549132947976878612716763005780346820809248554913294797687861271676,$
 $c[20]=.9674267100977198697068403908794788273615635179153094462540716612377850162866449511401,$
 $c[21]=1.,$
 $c[22]=1.,$

$a[2,1]=.2291366754583519236030673645133762748730054354355653295828735109480807124394160800758,$
 $a[3,1]=.8592625329688197135115026169251610307737703828833699859357756660553026716478103002844e-1,$
 $a[3,2]=.2577787598906459140534507850775483092321311148650109957807326998165908014943430900853,$
 $a[4,1]=.1288893799453229570267253925387741546160655574325054978903663499082954007471715450427,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.3866681398359688710801761776163224638481966722975164936710990497248862022415146351280,$
 $a[5,1]=.6551906209784922857422767078442271047795131208410656630272756570309952009860496208429e-1,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.2510813422514891967604155822348681976818283087744159696723064978413445179379674643321e-1,$
 $a[5,4]=-.1051436222628428995287217455928158473311092119247524218989842910578457863645673528255e-1,$
 $a[6,1]=-.1371856396732518041154719008841900277068913268438891061113201238099492136735818160995,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.3684982238658051016437471585944456984331432131953844866850661066142978158100176380776,$
 $a[6,5]=.4398331707328895902870974868265951278821204265295000678501980887671597116095712428447,$
 $a[7,1]=.2915367158711915587880161026385586982078998851998713406692270220455530169469343449625e-1,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=0.,$
 $a[7,5]=.9310238172392638287995829209926304733760063823922779976301745427558090945748694672327e-1,$
 $a[7,6]=.265538460663515428357589775064805900067758861115312658158265029857145651527095438978e-4,$
 $a[8,1]=.6166806826012526707343918069489564241243622264525546564391828156736133021131747785062,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=-.2504410641053546785731406286891347065284552528622195476604515887570949057417032909808,$
 $a[8,6]=.1950291243685313379064649213214399603884435685870508322715809416197185756656688696781e-1,$
 $a[8,7]=2.301578964387108421652443618605397012064040317978318796317945998006604092328583726718,$
 $a[9,1]=.2043036992723789506767002994552911125073017788655536495384622587488068140005772420750e-1,$
 $a[9,2]=0.,$
 $a[9,3]=0.,$
 $a[9,4]=0.,$
 $a[9,5]=0.,$
 $a[9,6]=.122168228546133251535207858755780738167701679104749476129958263553676018670620251230,$
 $a[9,7]=.2429557060861411050273219909198121746589012417320148685898053174474437521194969537956,$

a[9,8]=.3253518988583505861930046979941229510099096485788990892616446263599045715171625112102,
a[10,1]=.4297156746461796501268239915456739764646595483271262744228230556055048144795531990473e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.5831727524052480264939759155642894892686467451949630611121166808133548381877806141006e-2,
a[10,7]=.1467317394390714300117745611301564698910072994352946537780888878855466159959150922183,
a[10,8]=-.2176955085708678491437449729261548106118637586150366869023031056764662267279718929619e-2,
a[10,9]=-.4271094293632470390880495896090584896601865444440554763310736870075580244734801206104e-2,
a[11,1]=.5966141978861395386553101364198175672940643415026812040891500785377405967947860161915e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=0.,
a[11,7]=0.,
a[11,8]=.1653562080928760171276612127401391768276988442370166488376560783879602982602786447207,
a[11,9]=-.1268099398095714303059046646184678670596818312052000460817948316793055993759051930685e-2,
a[11,10]=.2697212618946126161621004972400087622956221241172070937572021885355397977103591939070,
a[12,1]=.5703996367013222979179280579312916287035487276645972576751072269849841690997958261978e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=0.,
a[12,7]=0.,
a[12,8]=0.,
a[12,9]=.1703466776037774526644526249844058774955664186807233042102841991829591525635364835320e-1,
a[12,10]=.2848448788313809766000602628372253568646469564441486281969782077867032097811569288941,
a[12,11]=.2802285013690423626226847212157625500776598429559211828265530442935639009844171600946,
a[13,1]=.5703042571592413980134699619763640061056249656484758113211030942174930475991748852324e-1,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=0.,
a[13,7]=0.,
a[13,8]=0.,
a[13,9]=.8646003050401074338340359578640134364041087323719542018969517876748790848912674104871e-1,
a[13,10]=.2849010171375483073649851685395681446477965172752164150764863780337888838408258691584,
a[13,11]=.2792420172610613818936409683018087180268593317431364474449056478424334783316489515908,
a[13,12]=.3257269494846573683497378663850291884756665746826392997123547562526207406301703215298e-1,
a[14,1]=.5763788353110220864997702244767306015287369835148136213044049575815848582592719017696e-1,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=0.,
a[14,7]=0.,
a[14,8]=0.,
a[14,9]=-.7787191026381020036758706042284812794111606699113065272294466474957889919639912705284e-1,
a[14,10]=.2800557867729435821109978882586999820247567230690721115879754574547457069130775652037,
a[14,11]=.7214120505502048971657943109875821329498183195678332322447215059111210463872705790712e-1,
a[14,12]=.5289885125498503571199658064432083366183354381239916765457027065246074490293110584708e-2,
a[14,13]=.5397817844703631007937268955834381102474878975531953766552702123276172125754789626634e-1,
a[15,1]=.5434118549547910893794911360771921135503485236007847417008766351491111948677713326551e-1,
a[15,2]=0.,

a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=0.,
a[15,7]=0.,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=- .1089283116298442243436673498084805382994267581403361551356413147803882581558078814514e-1,
a[15,10]= .1021966869189624675559466601135663399130115154711609103694958238940626712769435732086,
a[15,11]= .1488317180224071380004414613346842251441789105465584992679660175931982411959578552228,
a[15,12]=- .5257760753437196164433587772875339098090543316823740659986967290566723357839272309428e-1,
a[15,13]= .2088477689644922932569409971480002442216219029248972170081300660122788296621046640180e-1,
a[15,14]=- .1565096952908587257617728531855955678670360110803324099722991689750692520775623268698,
a[16,1]=- .3285356629132510282723338325288692402315958183112809127540229806099043238139563860749e-1,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=- .2530080704838763891580124091684006808161216267017723808288711253644350103687183760220,
a[16,10]=- .2924110154131817691388606699215528064556999794977752283840368347641569172180889902337,
a[16,11]= .9620718853674267415370220733381062006208136455332986992778274680426037569862757763052e-1,
a[16,12]=- .7991305959390360681981574626547640300137259426683597841104028377529858115488844099880e-1,
a[16,13]= .5402876677610647372738478484484762823566367985061461535251687611634304551679173148324,
a[16,14]= .4300341296928327645051194539249146757679180887372013651877133105802047781569965870307,
a[16,15]= .4616858237547892720306513409961685823754789272030651340996168582375478927203065134100,
a[17,1]=- .5238646120080002598401261879713366221038337344722459064407810803638353046286823629930,
a[17,2]=0.,
a[17,3]=0.,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=0.,
a[17,7]=0.,
a[17,8]=0.,
a[17,9]= .1817551535946354831359963115351684218320846487928689015492373172107471589531950258440,
a[17,10]=- 4.146732578976073922558600670221764433919728174967638066034468174062226958773963978659,
a[17,11]=- 4.719522409605608289711431188008528677387689150149078987216602923406577216424302269671,
a[17,12]= 2.073309232620459147998394802588887571881832031173682830303448132252040715895087250431,
a[17,13]=- .6926129589760664368000965735071714633890040053511854182488553667091608432521045085954,
a[17,14]= 5.305361206278489026605168330380325540335037095489865859824164197271520196456753603927,
a[17,15]= 3.237708083818319423613232115160116547605757302710133957169350824370592521593025829995,
a[17,16]= .2485292315125522952191546023328603290758922454800644907860493619941136605292501161892,
a[18,1]=- .1590278092898614245130838965316595923951567508017645271842597191108991011683549541582e-1,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=0.,
a[18,5]=0.,
a[18,6]=0.,
a[18,7]=0.,
a[18,8]=0.,
a[18,9]= .2579344002978934847577587084105635605016381556225665206709444348357508805975643915476e-1,
a[18,10]=- .2722441685993807477043651514512675649022718609315768850028755944955150572582646604676,
a[18,11]=- .3238393995191875891591290280886918565667436471761164809127611449990222149716150806958,
a[18,12]=- .5227410721331112796050587111126163211550026639486473134093409617383071904028207093501e-1,
a[18,13]= .1173393758187269784611803812744247862396174511959024896501909356620588131719759063518,
a[18,14]= .4868446084372204021552015489422650453724460838637151553965847617808286324109824697505,
a[18,15]= .4072304760878694231006554625647137836266196540501090034006526860538723916832292639923,

a[18,16]=- .6503271412112905385558359624203245992753278857562024231510989303718183561695881677411e-1,
a[18,17]=.1502104982490227040596868118084023540767136192673846425264809381979105021012213678221e-1,
a[19,1]=.6248634610255671494484302617078065464701886247409179838808466938779700395427748122754e-1,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=0.,
a[19,5]=0.,
a[19,6]=0.,
a[19,7]=0.,
a[19,8]=0.,
a[19,9]=.1460829800132525649596750176093637147307362400277897918547526212524813193695420124535e-1,
a[19,10]=.2856457435740863911871621643935295652425328100954916680092399268714918309719097004280,
a[19,11]=.2807629544220481294734047345291107824252337727685958606283459582678235722614622133973,
a[19,12]=.9241644950555821665125141486438107105298201325422194890965940852802578956173616091530e-1,
a[19,13]=- .9266138767191309009093740625349488804622794422762266668227160692640143135789440039004e-1,
a[19,14]=- .1307884712133251131371951787178021259745770333203711787082441663788223127352724814494,
a[19,15]=- .1925296863944023995186217750179711502614946940424913037376926388572773980179803260355e-1,
a[19,16]=.3526864634018341154123782465036100893841462875664875458246388981890024899609262453394e-1,
a[19,17]=- .7780799503599108174237009619799353980082521107679656968119755739134347588662264902571e-2,
a[19,18]=.1100755359033286796152784005214818905194575572861283051100605334221287335699809247658,
a[20,1]=- .5603189465240816275568461927491456375984832093350137312617161487657939505982456288818,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=0.,
a[20,5]=0.,
a[20,6]=0.,
a[20,7]=0.,
a[20,8]=0.,
a[20,9]=.2598726114649681528662420382165605095541401273885350318471337579617834394904458598726,
a[20,10]=- 4.421261939032549163595015605875857463571425619855552581856515507660454985496383097440,
a[20,11]=- 5.120982330214153540802682024282346314116782292977032209107271442606063657480433567514,
a[20,12]=.8923512747875354107648725212464589235127478753541076487252124645892351274787535410765,
a[20,13]=- .5953608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443299,
a[20,14]=5.785211942156359512059914021656833837410952032068883826326706546560069854240299832266,
a[20,15]=3.443058313843001225252834445943485144284557027619292391627549311984570796642909573525,
a[20,16]=.1833153656938244269550630991701427539034614121290574652513782359958733686079981887285,
a[20,17]=.2020202950605431444306031842148416180880690998907910718427806963369659818759621863109e-1,
a[20,18]=- .8544019904652831991177222189428424775708197938917643607476450914092613614186724109357e-1,
a[20,19]=1.166779412205557520468283393088002830033764018428283572767338614644557447953509416300,
a[21,1]=- 1.369855708782679064912557291383039568176235941398406814994828457121745299463233602734,
a[21,2]=0.,
a[21,3]=0.,
a[21,4]=0.,
a[21,5]=0.,
a[21,6]=0.,
a[21,7]=0.,
a[21,8]=0.,
a[21,9]=1.518624641833810888252148997134670487106017191977077363896848137535816618911174785100,
a[21,10]=- 10.32597734512370330809380487634962232663909711569775546782766698804725153638182528560,
a[21,11]=- 13.07273437890943877640725629248696006544295591791839737445563711138892480663306714464,
a[21,12]=- 21.79427944808310837957244989658795887030089839220656910993217520159804046774930904700,
a[21,13]=1.925,
a[21,14]=15.81654761732456985061467172090826891228559841658328449694981445615448731908884356633,
a[21,15]=7.932077932612235555467817237794991501052754954427483606401367621339425685834664536919,
a[21,16]=- 1.328844258680808488420630358856155659275747210986841589558992044669570095955913462259,
a[21,17]=1.252966172231837204902004300222461121215208347904427977424101923199928471096150087283,
a[21,18]=- 1.991282577756447352785332231522235748822212313474209460955229294488173611359227868551,
a[21,19]=23.22191653568444163081458194095650621565655288912915437565453438616579321909858143548,

a[21,20]=- .7841591823507097598591932498309259986589849083392480026021374270817454964868380003350,
a[22,1]=-1.448521550140761356698641491072871693890772230634225759726838880910742970718788347326,
a[22,2]=0.,
a[22,3]=0.,
a[22,4]=0.,
a[22,5]=0.,
a[22,6]=0.,
a[22,7]=0.,
a[22,8]=0.,
a[22,9]=1.540744199810506804331418940366406837786419956861369796832187807941522786436091868499,
a[22,10]=-10.92839130897931613876187851230608625835106233846710589651118578857300527507015139832,
a[22,11]=-13.73093748493321310358952369622429929015974591597776750120161845825704652113574047610,
a[22,12]=-20.93563200346855201580966639898333256985379577153246904914286312977583654481424269459,
a[22,13]=1.737018678948040889955747463184484764060568076695755289577248736608174322621199672727,
a[22,14]=16.50288165411613210275659426208476977496888441696787389539019264238126600977551571820,
a[22,15]=8.370442417692095590358795800629154287649835570543439464035387946116106423564991671600,
a[22,16]=-1.289064138905453473194048296327937179834904320136964713801536052062922044186665353746,
a[22,17]=1.265824966341263608426771535291528496547119144680056645998114066378291870720335536805,
a[22,18]=-1.969659693849233753734216600411712693543099688107299883030305688430284817573492494471,
a[22,19]=22.69106948776708251122281940316572004653628680575192162637887470142850454973150496629,
a[22,20]=- .8057752243985916652641724093958245219157337066445839147976579028440277893505586695824,
a[22,21]=0.,

b[1]=-3006381067278243444877799100803433809173900618588275176366419088752224858402244473529e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,
b[8]=0.,
b[9]=0.,
b[10]=0.,
b[11]=0.,
b[12]=-1.298566637546286304984580518543448063423732466398260815095269596847372279426923067958,
b[13]=.6167506079962971192194211373490843992403072399199452756411452323841873114243375510756e-1,
b[14]=.2864474018163096832198009597470381492350751950186247080298721045770346678876178109119e-1,
b[15]=.1717162663184848079376083100067994453041892504831421384345935183799917769599531633914,
b[16]=.2640775284033671492665411787032096487844917888462408951942109462365287941494655559684,
b[17]=-2.690201128031156732065622441565653827528457235602815765021200959811530545983183585922,
b[18]=.2367976891168302912195981620258916202226106783040337614756173234082374246420614363166,
b[19]=1.525467107712606065337401203834912897904344129452486204512497722505345962423149594956,
b[20]=2.78605589945076329398961233178693382062873727939273720115530197547738690383180270628,
b[21]=-1.157303370786516853932584269662921348314606741573033707865168539325842696629213483146,
b[22]=0.,

b*[1]=.3005142333479194725600524982099626713764808508654571675058550462935122808166703127113e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=0.,
b*[9]=0.,
b*[10]=0.,
b*[11]=0.,
b*[12]=-1.358839772011115524553328208920873671502327176886037069275133041835810613006559657608,

b*[13]=.7739621597712594615207252418237481623236259556012272181582622441915768621788125948262e-1,
b*[14]=.2918639458132133185485321731563668407419926486011481960007749046944692947068737255018e-1,
b*[15]=.1717701230442506612941504883498838314943925685124932338751890064551166362871684572729,
b*[16]=.2431830816163822035800667206171719171905097052601100164890007351915260145655986262566,
b*[17]=-2.245435758047370169961968349076951619419254761856448200747059413210565558990763997126,
b*[18]=.2363325392896538862884444795758277070389790190610150328629753269762703310382754702931,
b*[19]=1.576987885324698951711393220734819650506978927384279371620227070932709880952823630420,
b*[20]=2.333707489531770200340574808344510643661606112640445866442273360123740861609636901526,
b*[21]=0.,
b*[22]=- .9433962264150943396226415094339622641509433962264150943396226415094339622641509433962e-1.

Version: 29 Dec 2012, Peter Stone