

A 21 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of a scheme of Tom Baker.

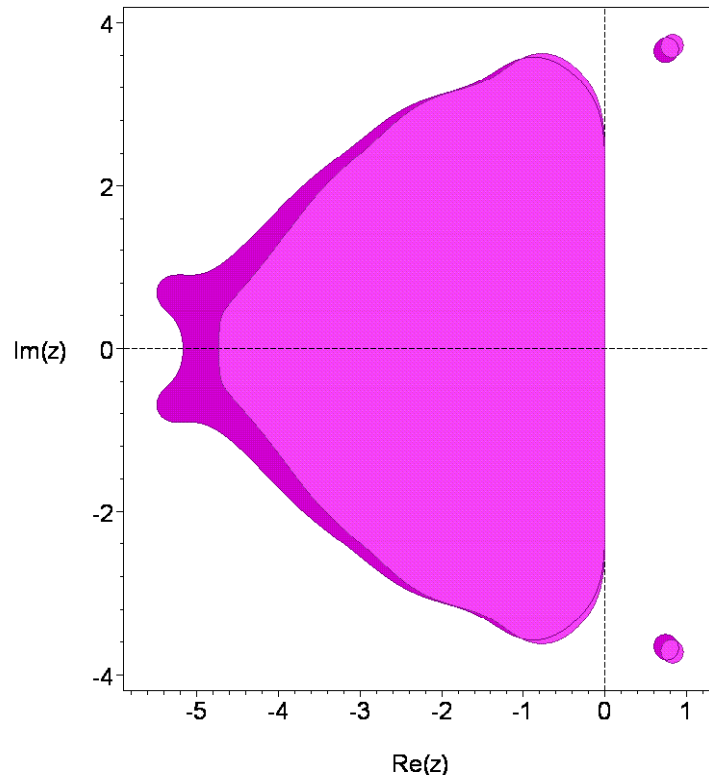
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.1679431462 \times 10^{(-6)}$.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is: $0.7983414327 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 7.975670863.

The 2-norm of the linking coefficients is 14.38852119.

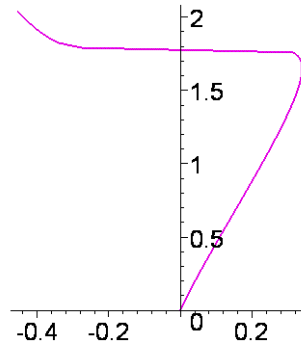
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively $[-4.7233, 0]$ and $[-5.1625, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 1.50345]$.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.2228196575155958179392519075275366366417671601004311994775145455244440255884192241494,$
 $c[3]=.3342294862733937269088778612913049549626507401506467992162718182866660383826288362241,$
 $c[4]=.5013442294100905903633167919369574324439761102259701988244077274299990575739432543362,$
 $c[5]=.1199205256368976671590051555898665272348027699266105314244121250989807617497340328430,$
 $c[6]=.6406698783397523282679043737010915379950286889978514239058496936701538085331229884069,$
 $c[7]=.1854219948849104859335038363171355498721227621483375959079283887468030690537084398977,$
 $c[8]=.4341609896866671982049997607963724879185524718346840216143733662828361772142749094797,$
 $c[9]=.7122334706944996304939844505181846984468526420455598102446689494187425413269679060017,$
 $c[10]=.1894400118821512130727859131671100540796429426980610878538490963781184253761031458677,$
 $c[11]=.4943921040825482279048900852400179452669358456707043517272319425751458052938537460745,$
 $c[12]=.6403413058113140068377409433010713385043672649502574820306805277365690350491617310308,$
 $c[13]=.7415881561238223418573351278600269179004037685060565275908479138627187079407806191117,$
 $c[14]=.3835,$
 $c[15]=.1071600192215281114848630466122056703507928880345987506006727534839019702066314271985,$
 $c[16]=.869,$
 $c[17]=.9640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640693,$
 $c[18]=.29,$
 $c[19]=.6311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454,$
 $c[20]=.9975,$
 $c[21]=1.,$

$a[2,1]=.2228196575155958179392519075275366366417671601004311994775145455244440255884192241494,$
 $a[3,1]=.8355737156834843172721946532282623874066268503766169980406795457166650959565720905603e-1,$
 $a[3,2]=.2506721147050452951816583959684787162219880551129850994122038637149995287869716271681,$
 $a[4,1]=.1253360573525226475908291979842393581109940275564925497061019318574997643934858135840,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.3760081720575679427724875939527180743329820826694776491183057955724992931804574407521,$
 $a[5,1]=.874952584191397961991503012954068098741004279019888342443533516581454110972035699132e-1,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.5424868088851114744116762122240223586694125681343856228352477361712947466085810943457e-1,$
 $a[5,4]=-.2182341367075327648131276692794251850623891478881691428354798368396325402084443358285e-1,$
 $a[6,1]=-.2208026206336802662068214319830683947774052042670774959775819498231614835409637718466e-1,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.3296900534992514233295613348584570434988813004213589130159107022477967501376640997527,$
 $a[6,5]=.3330600869038689315590251820409413339738879090032002604876971864046732067495552658389,$
 $a[7,1]=.4289813813592834170068997699522817714174913599146512524161403672243888263543819427078e-1,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=0.,$
 $a[7,5]=.1423335112864298333097251348790681917342815663453393427108421259074357649131869170592,$
 $a[7,6]=.1903454625523109230887244428391809960920598115331279554722261169284215050833285677348e-3,$
 $a[8,1]=.1808214864586014958980779518978211587645928141014318816218435924003615629582098787113,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=-.6004997454171039973499350037151917869540077043430358234945847097071643813353940802849,$
 $a[8,6]=.174400608807280822038783387631759746342420598422870710408393440557323239647980920766e-1,$
 $a[8,7]=.8363991877644416174529784738505671414737253022340008924462745491840657631949793018456,$
 $a[9,1]=.5967838995616460362257227466520081799242284938416664165066610583086627198691962638998e-1,$
 $a[9,2]=0.,$
 $a[9,3]=0.,$
 $a[9,4]=0.,$
 $a[9,5]=0.,$
 $a[9,6]=.1682303493478198502137788520481477015334894427302907815137696040022855133136066365333,$
 $a[9,7]=.2589733219052786126600216959915392910879969075843645675400659307860341209602416240850,$
 $a[9,8]=.2253514094852365639976116278132968878329434423467378195401673087995566350662000189934,$

a[10,1]=.6700413347353715295643026260855127029054499718383871010990085359542152413769459186823e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.5252222619591393273086942636468785320033146544432498794839539201687501323042897675183e-1,
a[10,7]=.1551593905371601209758991261631619296412336346729038987443680808718154015364122795259,
a[10,8]=-.5839936075388338702226956855454678589240573317536527420574915805145004790259527973063e-1,
a[10,9]=-.2684637757057660656814333341474421316006142142764123474306607205454346562583742254759e-1,
a[11,1]=.5977280811139905585372550651246356808235426067679737403313526853718573290711623848095e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=0.,
a[11,7]=0.,
a[11,8]=.1656649293862483361405074818514532776463336568967902621388522106344697972369246247125,
a[11,9]=-.1270466949280033185414788088990888420192701955938682459301425818083701618043991807273e-2,
a[11,10]=.2702248335341808690960718849650919879584406300530553980145458892215739767678568746883,
a[12,1]=.5714645771448200447785552981448719840014427853557948396915586506683821308231851509689e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=0.,
a[12,7]=0.,
a[12,8]=0.,
a[12,9]=.1706647161415381726674027121760674547307935977991170786228955786735926741896200083854e-1,
a[12,10]=.2853766863783580653666986744969986100230711502541906771697195040728494069659157593173,
a[12,11]=.2807516901043201197264464677719787846080724763805756130295156007295221475819654557781,
a[13,1]=.5713690195284114127328778732937449066745021789068274496541349171026582535424987926500e-1,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=0.,
a[13,7]=0.,
a[13,8]=0.,
a[13,9]=.8662145203604790864433453146724662520664624596340934371456974884597799039912642282155e-1,
a[13,10]=.2854329294951683565410190993925533133196890656116041594640594939354479220100814703043,
a[13,11]=.2797633642230351934315342234640633011614727372594618239424577797649846499809108131919,
a[13,12]=.3263350841672974196715948620678918754514550178089845550434739960604232019641203352892e-1,
a[14,1]=.5790939599688122255693984668710989807011548901309679515345524886969920091713038013732e-1,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=0.,
a[14,7]=0.,
a[14,8]=0.,
a[14,9]=-.1142433824995921129683957840730398501764251087804361546224170077248311967225502961497,
a[14,10]=.2792281221045030532531281814659107940174307193776276274703070820764824635556218411009,
a[14,11]=.5635338895653354967161637786604749925160675112018125846364265344165366613246957770466e-1,
a[14,12]=.3126975812590892100353256124999140410111894749778941439535606249163845706020110085367e-1,
a[14,13]=.7298271731576536648317881680398025473615320177174105913965596084535740905712739635311e-1,
a[15,1]=.5430572429946557552154631404163766813678191677208609040491118140744393427688587504230e-1,
a[15,2]=0.,
a[15,3]=0.,

a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=0.,
a[15,7]=0.,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=.1449864492657304960599048292282336209782013826679695435127487057843158554929553651419e-1,
a[15,10]=.1059801902656066787068052382116924496204365083963501423048360238836633092480530617458,
a[15,11]=.1457718932196702395051387432934038116584886360336116844907903313389997515578252614381,
a[15,12]=-.6776199790355623292214091287206601420126978882434812513762734894940562237487602478456e-1,
a[15,13]=.7013539491650421005217885064558629798660087982002315712967446003585211326394757741111e-2,
a[15,14]=-.1526479750778816199376947040498442367601246105919003115264797507788161993769470404984,
a[16,1]=-.3110806845687005114556985281443501638783846353534987635694130656507001731438143656274e-1,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=-.3970826905052352014824074900999243257904217514190138984969860155192019201861346266342,
a[16,10]=-.3156359067922981824745168502206918407998911984497979432577298077785560744121389770439,
a[16,11]=.3515666786475416788124716751764556225205702461298649696051503024990473664516828008018e-1,
a[16,12]=.4826553079777392290172523030994346689827717821361760662232625191728175734307295415233e-1,
a[16,13]=.5999430908219884361347412701014050328770792385629898552802055352555418437821864722916,
a[16,14]=.4609929078014184397163120567375886524822695035460992907801418439716312056737588652482,
a[16,15]=.4685,
a[17,1]=.4537883031537245974313320161132423810832948436106212428222874492332942862182809331486e-1,
a[17,2]=0.,
a[17,3]=0.,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=0.,
a[17,7]=0.,
a[17,8]=0.,
a[17,9]=-.1889101960465037258501037679683610457786769161663913799021613960418846033842080473061,
a[17,10]=.2025819915776769481857512121211436141666437861927537681666806649856578190745107431243,
a[17,11]=.3490953932632179103361762823687338430823349233922419410039729268260824982719986738952e-1,
a[17,12]=.4531299818121231757268817943449241499304846444392027902809576186655150942736106550466,
a[17,13]=-.3305677792993033522261537464897585311615904989207543414749138969348245484628016878538e-1,
a[17,14]=.1368743551266061431772484127672976364559520304413135958978797105508869442290856420777,
a[17,15]=.6122705783892337574484800309621680806398045904342473505781546872164200626860932034253e-1,
a[17,16]=.2519344820486742367253081545088211371252813333107496755277625492749915851997131588653,
a[18,1]=-.5251454052465447565044465831454689679071640269114859414475029280406625509309401641965e-1,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=0.,
a[18,5]=0.,
a[18,6]=0.,
a[18,7]=0.,
a[18,8]=0.,
a[18,9]=.4521938432944470694422965017095898358437689800563209784668413535796027946575696086519e-1,
a[18,10]=-.5831250142792014824448312172250937170622602508565530278795015574515420822204651889861,
a[18,11]=-.4611929474770156236346742737115601416446204016161247592817518311061952443631489046511,
a[18,12]=-.8124448999170323295880585646608723562899883571781562106497915958110662420244363862204e-1,
a[18,13]=.1784856823887262327583700633291627398087145946589336667650682463287163811698873374934,
a[18,14]=.6974953465139119496964914036170384193413980374971107154816928652316602332966812989860,
a[18,15]=.6260059002696352208982593357942690574283943894641743899529247181758744501425534098186,
a[18,16]=-.1019868395988377048967188488181437800796728495235125100761780528509401203334256825569,

a[18,17]=.2285751836969440928812440162400257104338482077930364240079092869963898213769842407255e-1,
a[19,1]=.7210540095791757463717765812021848333496584993369352843889906334995668386183889920161e-1,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=0.,
a[19,5]=0.,
a[19,6]=0.,
a[19,7]=0.,
a[19,8]=0.,
a[19,9]=.1325931450015971687128444342104762601356916347553840224576707389834320291868622069930,
a[19,10]=.1388245345048898463207629878026349135553211819035372790665141810241653551754179185258,
a[19,11]=.1318514777832791604646812475818471527606745033701043784922186656735418357587191946102,
a[19,12]=.5210400119078308734151640451242269560693225444731005118960105366585245222438482099711,
a[19,13]=-.6061454338637792763278541968527801505257413376058681788702461869165642969070756307686,
a[19,14]=-.3473922258361935605322401244879658100583807543228608883991375201603591643611921580767,
a[19,15]=-.2064549997488370702261561038594502417945285887211601348272995802016247340693650602810e-1,
a[19,16]=.2027539107160650541610811046006578781044194975579022219930714900933475947547555501607,
a[19,17]=-.4365383094495128211588293527051046661703584956979823554757041711421070586568207683708e-1,
a[19,18]=.4498139408936592937180268207025709528513610195223525193864448375737597649905898233935,
a[20,1]=.6273883016035987886219234810599700495016884116725297717507042085604157219028098730299e-1,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=0.,
a[20,5]=0.,
a[20,6]=0.,
a[20,7]=0.,
a[20,8]=0.,
a[20,9]=1.652511485622607861400493407053440208771615728191556048362597083590656982174459690182,
a[20,10]=.8528473456141582251995796485182637417493610240521472758461235525309828034137311563107,
a[20,11]=-.5866524274850176514690087815462511367736847302826609634449322675681336458702694916813,
a[20,12]=-6.942591662074943406361129302491275442954708757053198055264452493805227718917800926568,
a[20,13]=1.964067141295805102747817857442082447023292786685638913796021028101086076678015887096,
a[20,14]=2.627573166798385408810182605185687951546102957994476153021483254422867950393324500004,
a[20,15]=-.6987983744254514154300254661387694054834825007908882302581119873950396711340881538572e-1,
a[20,16]=-1.261421587891946598536606833326420408853008631772803621837251495306725179935570364333,
a[20,17]=.4387696694196965961776809687052027097430413039607710971748333584210685858325105088535,
a[20,18]=-2.007910073249921890067458120302323733487428029418181008914140250727828948949235004900,
a[20,19]=4.267447949233361614779258749269473598833595756554090007110459008224715490103961873120,
a[21,1]=.5952955341717038969713580508857405461818653951104244148707146048468275016911964644865e-1,
a[21,2]=0.,
a[21,3]=0.,
a[21,4]=0.,
a[21,5]=0.,
a[21,6]=0.,
a[21,7]=0.,
a[21,8]=0.,
a[21,9]=1.866933725577399197391798086876366349640230267453056207697045011036679219105152493353,
a[21,10]=.9154531043791632353696181478952753913551540364476504886811627090950543557541803610897,
a[21,11]=-.6635820291776502529448769459490914797900499900951847333091847723190825887329625997057,
a[21,12]=-7.975670863246992871362801146379468049351532352978576869152508056172754017050452966174,
a[21,13]=2.302228862102316623332809873702801617537634687282878051424684243047585347726938355162,
a[21,14]=2.994371385880819284992660279546896052035345185772270443404066349014865150773445472014,
a[21,15]=-.6143056803730357468718819013312495219035602875173182997275918330660405105961147103897e-1,
a[21,16]=-1.485341339210978545194970597912471309194713451024870729423946442785440829099184706700,
a[21,17]=.5042544766372383527319864318470815957785969805479719567376231692475632974276870785265,
a[21,18]=-2.296841500905580120414966098398758218321317027962098971307288776852618395566728508424,
a[21,19]=4.842971247035631867405689743167408834206232249137575562805589547414712988306701491725,
a[21,20]=-.2876054451233586316895389351489886323411095339982019071555257904643227754284646276274e-2,

b[1]=.3067250352611764024435649616294045231751054897905988463874766532608009034907833693025e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,
b[8]=0.,
b[9]=0.,
b[10]=0.,
b[11]=0.,
b[12]=.4799901163184385482083329045569356997805199944644865950725295553045790754635603322913e-1,
b[13]=-0.3133423680724294686123916050875782072780711727345298937069790388233117297030118092243e-1,
b[14]=.1689823449884110200234866195631026164905954402338947793008518158360173460077003394160,
b[15]=.1703481170878738899730696294847034517143821949945081160110110281076020892547329273124,
b[16]=.2458812248357844655815211373248045743308474288703151039047342468501214443784926416820,
b[17]=-0.1867090994975221839143917371225662235105017724710911719673331708960357720285313728403,
b[18]=.1243381586075890208933846493235861772904448333799249407975842033315487635107454741771,
b[19]=.2341490766639369197208469460995380329440825284842269580983218380501315320895806563467,
b[20]=1.496501132223941943634760761139711037303072334927812374233064973047430594448335316582,
b[21]=-1.300828233260733624116628631922755868130678419571646655153537651301022822586189171913,

b*[1]=.3065435595153970874347997852214673389988823627886535468481257246269453137246960380621e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=0.,
b*[9]=0.,
b*[10]=0.,
b*[11]=0.,
b*[12]=.2809675929372958344481086804632479059104328164928216344078308645871443436822524102177e-1,
b*[13]=-0.2203271447869191395643076557051257332486197124212757368398914952618854901859860625541e-1,
b*[14]=.1697500381266091327622731984967908529219065121351942189340670956139900460168260050300,
b*[15]=.1704368652959410216717407960856561124283156803014864238863028713366100682346095853161,
b*[16]=.2329492468963725823936190996560912651818392560187327467909497970581626387394648314135,
b*[17]=-0.1465678289539234418265211672050273713535424511638927009452113100729357983680704482146,
b*[18]=.1238199301881307744196446517630180706783487243722471875871232857862901586280604921343,
b*[19]=.2491580262060311445374371235458922259984940945488939324624686839943220120485838265136,
b*[20]=1.217952188944140925882235373286125917074954179269992945637873789779906723038670433090,
b*[21]=-1.054216867469879518072289156626506024096385542168674698795180722891566265060240963855.