

A 21 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme

The scheme considered here may be regarded as a modification of a scheme of Tom Baker.

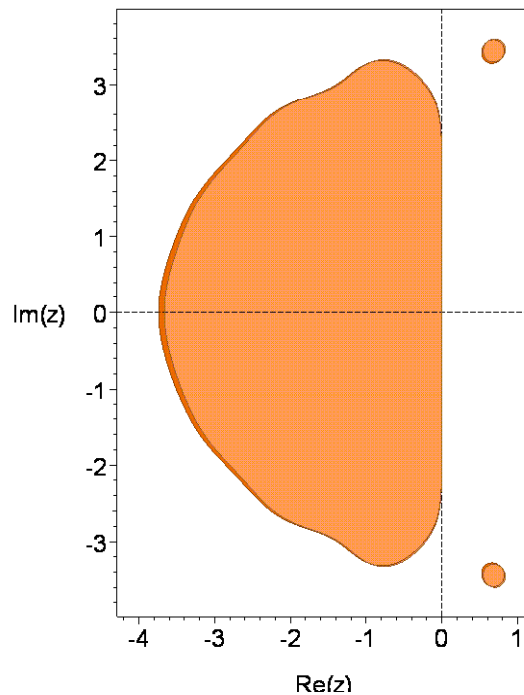
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.1039030915 \times 10^{(-6)}$.

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is: $0.4940079442 \times 10^{(-6)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 4.681322921.

The 2-norm of the linking coefficients is 13.38049575.

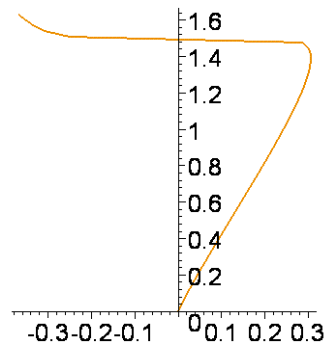
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively $[-3.6628, 0]$ and $[-3.7389, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 1.50345]$.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.2114069670631310419899984585311541330975127685061465058014581454502348140637742797267,$
 $c[3]=.3171104505946965629849976877967311996462691527592197587021872181753522210956614195901,$
 $c[4]=.4756656758920448444774965316950967994694037291388296380532808272630283316434921293852,$
 $c[5]=.1823919098512698668437826698637563127755101577185958687218660606272243815741715546014,$
 $c[6]=.5763531048287400706356741014350094430733721283059973150968573350242689292856048711656,$
 $c[7]=.2922422954303931987247608926673751328374070138150903294367693942614240170031880977683,$
 $c[8]=.4341609896866671982049997607963724879185524718346840216143733662828361772142749094797,$
 $c[9]=.7122334706944996304939844505181846984468526420455598102446689494187425413269679060017,$
 $c[10]=.1894400118821512130727859131671100540796429426980610878538490963781184253761031458677,$
 $c[11]=.4943921040825482279048900852400179452669358456707043517272319425751458052938537460745,$
 $c[12]=.6403413058113140068377409433010713385043672649502574820306805277365690350491617310308,$
 $c[13]=.7415881561238223418573351278600269179004037685060565275908479138627187079407806191117,$
 $c[14]=.3848946986201888162672476397966594045025417574437182280319535221496005809731299927378,$
 $c[15]=.1071600192215281114848630466122056703507928880345987506006727534839019702066314271985,$
 $c[16]=.8658493870402802101576182136602451838879159369527145359019264448336252189141856392294,$
 $c[17]=.9640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640692640693,$
 $c[18]=.2881134844285015489972281102233817055274743192564813305070927767813468123267568889614,$
 $c[19]=.6311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454311454,$
 $c[20]=.9975,$
 $c[21]=1.,$

$a[2,1]=.2114069670631310419899984585311541330975127685061465058014581454502348140637742797267,$
 $a[3,1]=.7927761264867414074624942194918279991156728818980493967554680454383805527391535489753e-1,$
 $a[3,2]=.2378328379460224222387482658475483997347018645694148190266404136315141658217460646926,$
 $a[4,1]=.1189164189730112111193741329237741998673509322847074095133202068157570829108730323463,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.3567492569190336333581223987713225996020527968541222285399606204472712487326190970389,$
 $a[5,1]=.1083787803477438364449440403144751521654149069926837112405803570796541394369561108371,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.1171333259169092952311253660288446056828762004249188563993823918564757904055250129660,$
 $a[5,4]=-.4312019641338326483228673647956344507278094969900669891809668830890554826830956920169e-1,$
 $a[6,1]=.5213921811954071753604276203893756156576642180733764258389836380465242114811488047466e-1,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.2403183881971129328688025041396124576279463168510344264379301552736039364683762430923,$
 $a[6,5]=.2838954985120864202308288352564594238796593896476252460750288159460125716691137475986,$
 $a[7,1]=.6316767061419529062761133603899821666070658756149762582726877013259322587193138849235e-1,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=0.,$
 $a[7,5]=.2267357617193493291272205968515068413783803884805983244588288431268891206951649206908,$
 $a[7,6]=.2338863096848578969928959776870074798320037772994379150671781001941670436091788585194e-2,$
 $a[8,1]=.7550169992554549885866051759659407312565114959492429811313446031889776981777229758816e-1,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=.1346352525892561872015472592579456054542335669102630847102698866619658218300795160881,$
 $a[8,6]=.1486111276104606696873168610859051942550883489234695419212320300617336826396739732567e-1,$
 $a[8,7]=.2091629244108194451760602978332422899131589204371496845988458162957992173024556984777,$
 $a[9,1]=.8581709416721947316901436049901524278382223617991213438588974147552163684911471121470e-1,$
 $a[9,2]=0.,$
 $a[9,3]=0.,$
 $a[9,4]=0.,$
 $a[9,5]=0.,$
 $a[9,6]=.3878695836770194241853931097935274239395241868419905324861369613649408554414853662995,$
 $a[9,7]=.5177562581704474566797415523865379725564027274772001245401764862246131137982616314123,$
 $a[9,8]=-.2792094653201867235401645721608959408328965084535429811675342396463330647618938029248,$

a[10,1]=.8297161743314506460904943317627119005528830451811266686899160294002533002233909358181e-1,
a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=.1820530182127331767733016618264811532769257844828733902799915486003108679200391482066,
a[10,7]=.3042651194250249722564934435550350614344343531147281591164713152203795182289849277693,
a[10,8]=-.3403411241240529656850497021795922295890734884081061704472257458653861107334650177070,
a[10,9]=-.3950861906469903488100892321108512109793201100954695796437962451721118006179500598304e-1,
a[11,1]=.5977280811139905585372550651246356808235426067679737403313526853718573290711623848095e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=0.,
a[11,7]=0.,
a[11,8]=.1656649293862483361405074818514532776463336568967902621388522106344697972369246247125,
a[11,9]=-.1270466949280033185414788088990888420192701955938682459301425818083701618043991807273e-2,
a[11,10]=.2702248335341808690960718849650919879584406300530553980145458892215739767678568746883,
a[12,1]=.5714645771448200447785552981448719840014427853557948396915586506683821308231851509689e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=0.,
a[12,7]=0.,
a[12,8]=0.,
a[12,9]=.1706647161415381726674027121760674547307935977991170786228955786735926741896200083854e-1,
a[12,10]=.2853766863783580653666986744969986100230711502541906771697195040728494069659157593173,
a[12,11]=.2807516901043201197264464677719787846080724763805756130295156007295221475819654557781,
a[13,1]=.5713690195284114127328778732937449066745021789068274496541349171026582535424987926500e-1,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=0.,
a[13,5]=0.,
a[13,6]=0.,
a[13,7]=0.,
a[13,8]=0.,
a[13,9]=.8662145203604790864433453146724662520664624596340934371456974884597799039912642282155e-1,
a[13,10]=.2854329294951683565410190993925533133196890656116041594640594939354479220100814703043,
a[13,11]=.2797633642230351934315342234640633011614727372594618239424577797649846499809108131919,
a[13,12]=.3263350841672974196715948620678918754514550178089845550434739960604232019641203352892e-1,
a[14,1]=.5788102033547459844971975463464971594978792912170482595923751717415813247870082153711e-1,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=0.,
a[14,5]=0.,
a[14,6]=0.,
a[14,7]=0.,
a[14,8]=0.,
a[14,9]=-.1080935610680864211519990524521228273826890687708598929900663802048563880690534634536,
a[14,10]=.2794639413420617471054996982217519838790810625614475300957776533505570872938204018825,
a[14,11]=.5899816443288078373537255732095584609437797783987936536098754922329663514451498071512e-1,
a[14,12]=.2687440396599875643000678743204197188422017612122046638693431815253010502967380471393e-1,
a[14,13]=.6977072961185935169864789463938271407776368057032593321908286445391500909547344734276e-1,
a[15,1]=.5445891928481166119767853826086532508256907889365853428010189199463900851435683267324e-1,
a[15,2]=0.,
a[15,3]=0.,

a[15,4]=0.,
a[15,5]=0.,
a[15,6]=0.,
a[15,7]=0.,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=- .1347861780861008248477348597137951789495281150340973249562893052791892330860045104804e-1,
a[15,10]=.1046172870195781815307136256879826795544092795519427768131984279711683559607822465539,
a[15,11]=.1361358753264821510785336339082189515726225461316213065462597339526455711244773669149,
a[15,12]=- .4833160489164283655709141200383048369756228116444566396239369918237806466266582330386e-1,
a[15,13]=.2174666603803547350141134213264756630841971980339244895936521433321728694609734736240e-1,
a[15,14]=- .1479885057471264367816091954022988505747126436781609195402298850574712643678160919540,
a[16,1]=- .1307083247720202381656049626570309468470525806594912144510475671740180823402722826513,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=0.,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=- .8404769255590047585378070643836719940434479264762724201692741513988904330116964379100e-1,
a[16,10]=- .1090798323511142182162165640362037549362916473665465317491470321351284903685347028559,
a[16,11]=- .6652039138171931414156098971789638368803166396311810802047620836437471483879527649153,
a[16,12]=.1763189420977006191808372210363156039874768433300940498297415927976051759017372385304,
a[16,13]=.3372900264453637134921199966950924914308944364846781310369229779561931879983090945212,
a[16,14]=1.289915966386554621848739495798319327731092436974789915966386554621848739495798319328,
a[16,15]=1.033082706766917293233082706766917293233082706766917293233082706766917293233082706767,
a[17,1]=.2905039261748486445915455590435201067854139590463393446380042622890798719697770403399e-1,
a[17,2]=0.,
a[17,3]=0.,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=0.,
a[17,7]=0.,
a[17,8]=0.,
a[17,9]=- .8166469080565624095929389344361349658682967758211339978511387334035304180469630037876e-1,
a[17,10]=.8478773717642802166144648041036763793554619497413933955967011415557786949057173619751e-1,
a[17,11]=- .4620049693595669135762175480011402293903421286310308546115863386116621732691560249433e-1,
a[17,12]=.4444882299752489690844349521860228354977786549920359432415718649464547509437468558039,
a[17,13]=- .1303738725480534452508422360218108953239223701118608654133404533590689410026071174903,
a[17,14]=.2477206227403173832668420941703769702186509849136047078734134630061332360481749449497,
a[17,15]=.1503228735365371075590317414707020633584243949401691574599017505563533744096585318909,
a[17,16]=.2659384683129141008009173241929809664249138989017583373253246057364250513091585115567,
a[18,1]=- .6045151651969273869453425003194614328389932722840715090389181115627081684556145062676e-1,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=0.,
a[18,5]=0.,
a[18,6]=0.,
a[18,7]=0.,
a[18,8]=0.,
a[18,9]=.1276673319171183409094610239965774602744186952462578037638981925301830187950323900153,
a[18,10]=- .6382428179149092532381590154877807317310313417607325136199854513143780071015920076451,
a[18,11]=- .4871334126795015820473061666885950655455052456158970770673956116523378857323470869484,
a[18,12]=- .128430671717639184340324219325011740012906676698901701604014777914189503722969716066,
a[18,13]=.1444281526247161354994341234300410747989336562135049653290312723378173968764449040802,
a[18,14]=.7469610389775663809678851539258584485662416362684895650496527424771041744910106378769,
a[18,15]=.6687317849663057957608741491444596832264347099291706353073124359660648064422896078753,
a[18,16]=- .1083010475711388998891993345471192127986844145349774513093346539878865674373097767200,

a[18,17]=.2288464234567655406909664580689793203347262743797425556182043937246964321108664266044e-1,
a[19,1]=.2665563838820003832096890137450313697596937010963899965291294680882013467255686252444,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=0.,
a[19,5]=0.,
a[19,6]=0.,
a[19,7]=0.,
a[19,8]=0.,
a[19,9]=.1899473479475511631648298959701604044123228953059138084368357951780284414762526341551,
a[19,10]=.5762443649438630709737024319865956656363203897907133690620475493759559803953160571022,
a[19,11]=.4343005261404121172919292466505906494462954369741396967033469028153866993446747981027,
a[19,12]=2.546481971547087230359694280330044781261997335370363001992735679197695933510352127100,
a[19,13]=-2.788522785794405221090058080634616990462214450756676945652372755342045642520883689117,
a[19,14]=-2.788268635837266693319935124938438387139965242448855627926859597606394537284662642091,
a[19,15]=-0.8623168309935135835360415618709757389483433009698085443915071879048407138389744384119,
a[19,16]=1.049517847843493443273325006557697259682978647111527384432246344565618816674601013536,
a[19,17]=-0.2131896384232265533062947590629440410195506215128971347713099178994817424114606950034,
a[19,18]=2.220394879889435788410305082412286172801610641184622141016853150677306563360361640529,
a[20,1]=.4885982230985538349115333656026133881211731365579636630122136832437042453260944906153,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=0.,
a[20,5]=0.,
a[20,6]=0.,
a[20,7]=0.,
a[20,8]=0.,
a[20,9]=.3600943698121909589736672134904551998806157957431202705784685347988354518052088102858,
a[20,10]=4.219497737376313040350918228661405683483302131550053381663797084282657252480905726518,
a[20,11]=2.410699041258925182382768627812669512987317451005920580250499851342462414042190488720,
a[20,12]=-3.982189851419080926346340898854029731568832483065397055097760191370893559049565030431,
a[20,13]=2.877581826282191932775915492498950010359849202369772916878602785066150973517686531910,
a[20,14]=-0.8169316574215410459729087556104879219524931360147123571062257441164854161519271912577,
a[20,15]=-2.491395731487660810778119454481355256101880686709094299483429491664716817382691585855,
a[20,16]=-1.273464387189245570794710257288238066903157585579546554002290821842387534699937605907,
a[20,17]=.4264779301197861441132521702756824977710070223692488208098218640796920080972647962526,
a[20,18]=-2.068752052255512130670044914595570575903411167930117883572495563486233900587290657970,
a[20,19]=.8472845518250793910540691824879052598265103197027885160687980096672148826020612271180,
a[21,1]=.5359848192845641149965171350034765751603892893168135135841695534527083825583752211812,
a[21,2]=0.,
a[21,3]=0.,
a[21,4]=0.,
a[21,5]=0.,
a[21,6]=0.,
a[21,7]=0.,
a[21,8]=0.,
a[21,9]=.4111693844233991059787666487811603304068070486454993297996076578102934864833316283088,
a[21,10]=4.681322921311408377325788646914242324123358130072805319952956834095299885941897791035,
a[21,11]=2.685864140957634179482443230311869057682057243994773047609624003270663224085111925673,
a[21,12]=-4.599305343989830783455255348215405056132291505074863637287283435858230438734084356744,
a[21,13]=3.328256317558883431380335045839806514653775159899596501673597809836253412875015553254,
a[21,14]=-0.8569714116105895492620805060388839748992772661210605754783424373848000275390558347734,
a[21,15]=-2.770271219604748236667732760588222551375378620875426156116891967272029397696670930209,
a[21,16]=-1.499642372803372276908927807851832878662950326767078658099237945082117855188620168628,
a[21,17]=.4897768517885784184292504740215808643943153977207103835673817904680102808024461058937,
a[21,18]=-2.364013955239686655910306301525650206097271765384723133549408173652404078013568345958,
a[21,19]=.9607033788349348033130285974516731080775082687395043610836946197313779714014930772900,
a[21,20]=-0.2873510911174928701827054103814107331041054166550296739868309415024846975671666324134e-2,

b[1]=.3069489203667340948724966542833649843427007679509036719239607143805583972197961566722e-1,
b[2]=0.,
b[3]=0.,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=0.,
b[7]=0.,
b[8]=0.,
b[9]=0.,
b[10]=0.,
b[11]=0.,
b[12]=.2509624050544863003131593989146847289744061235909053261876944693773621141863765588474,
b[13]=- .6071841742893630526791170491186727165990340491614376352710835532922434014900786043746e-1,
b[14]=.1743426012047270183091519532715985378986700283166145159044274067675631715408454174947,
b[15]=.1701513837153897079400982259580285012112290619807709677808659819443303691033576094313,
b[16]=.2548630577553103509334340352500048915619624377635093327061494728876666203292932618293,
b[17]=- .1879163258975762225937801853873685770837436530302573445264055343854662623023658265117,
b[18]=.1220035748542868329295739069735407294830664929285375826042467833547068050522791667484,
b[19]=.4737380723811380714326986194272184360214108443819695961543893821843204803526255665956e-1,
b[20]=1.525132113167183014506934503189584507364840748077307204861893004526855089058895967997,
b[21]=-1.326889091699657913701179660629264389786938995944531148799598238800281454576916467726,

b*[1]=.3068960772335214730272663840331177965011106067385934098455876019111312481241420557468e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=0.,
b*[7]=0.,
b*[8]=0.,
b*[9]=0.,
b*[10]=0.,
b*[11]=0.,
b*[12]=.2492693394674423037795077221647539189157768189983568991727406715855669850252169127614,
b*[13]=- .5878773300952221483968984278309883667398699796350227663724154348672106391038509446398e-1,
b*[14]=.1745879672682677956135218096366070558160636750693246083880991828918735308926545059567,
b*[15]=.1701776794992987462976067173428651500957236669597380359189774905008624268644232741382,
b*[16]=.2519180436940331129193009995667553015905205876215206094365019869455094466857016923907,
b*[17]=- .1785102139203730188636450100922061813016346434568915095225202156028889084399093702089,
b*[18]=.1218492221810377154307393600485567238746158338836956788196187486188952296925653316867,
b*[19]=.4811661916445575038646986602536982960318431677964721364166201832357127741044569058428e-1,
b*[20]=1.458689467932007661973461739687085258429625681434251399797602900032217950966872851580,
b*[21]=-1.268.