

Hiroshi Ono's order 10 Runge-Kutta scheme with an order 8 embedded scheme

See: A Runge-Kutta method of order 10 which minimizes truncation error, by Hiroshi Ono, Ibaraki University, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 1, 2003, pp 35 - 44.

Note: The embedded order 8 scheme requires 3 stages to be added to Hiroshi Ono's 17 stage scheme.

The order 8 embedded scheme satisfies 116 of the 286 order 8 principal error conditions.

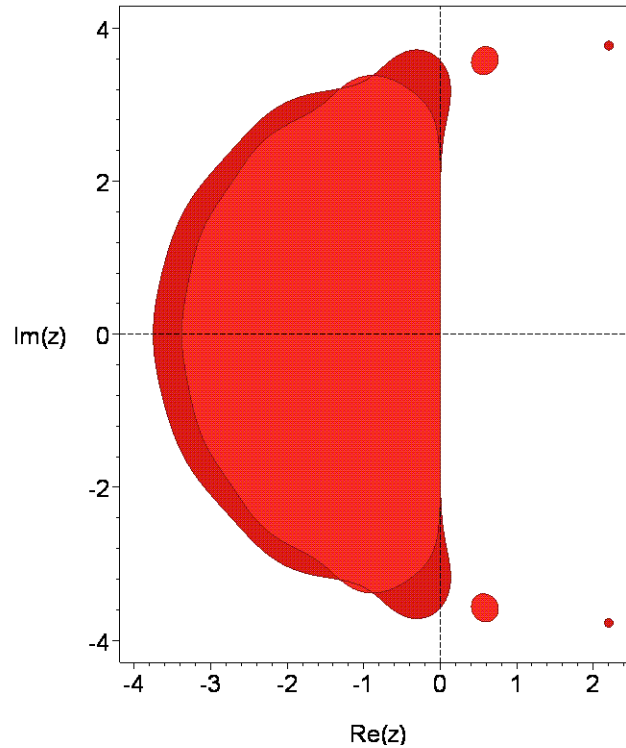
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is: $0.1252657451 \times 10^{(-5)}$.

The principal error norm of the embedded order 8 scheme is: $0.8942919042 \times 10^{(-5)}$.

The maximum magnitude of the linking coefficients is 5.145308147.

The 2-norm of the linking coefficients is 9.492237429.

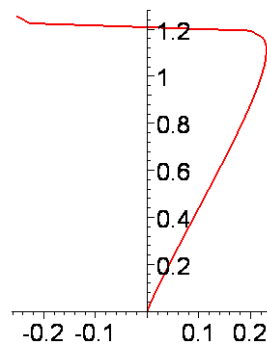
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 8 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 8 schemes are respectively $[-3.3816, 0]$ and $[-3.7529, 0]$.

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval $[0, 1.2017]$.

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.3357505083417036184129939488963472892525539577157696170900805997207182929518116563365,$
 $c[3]=.5263563553500217821118595221339767434067222948292617539626688113669112965383197614021,$
 $c[4]=.7895345330250326731677892832009651151100834422438926309440032170503669448074796421031,$
 $c[5]=.1852155685265047076970656199437875208987680209449849941608024849050604421517806064228,$
 $c[6]=.2895345330250326731677892832009651151100834422438926309440032170503669448074796421031,$
 $c[7]=.7659879027055932401898717206953675811356898851157703878511505293452324618973555436361,$
 $c[8]=.1080739009578824490100240661758266719014599665988034811870817465871751958605805741080,$
 $c[9]=.3573842417596774518429245029795604640404982636367873040901247917361510345429002009092,$
 $c[10]=.8825276619647323464255014869796690751828678442680521196637911779185276585194132570617,$
 $c[11]=.6426157582403225481570754970204395359595017363632126959098752082638489654570997990908,$
 $c[12]=.1174723380352676535744985130203309248171321557319478803362088220814723414805867429383,$
 $c[13]=.7659879027055932401898717206953675811356898851157703878511505293452324618973555436361,$
 $c[14]=.2895345330250326731677892832009651151100834422438926309440032170503669448074796421031,$
 $c[15]=.5263563553500217821118595221339767434067222948292617539626688113669112965383197614021,$
 $c[16]=.3357505083417036184129939488963472892525539577157696170900805997207182929518116563365,$
 $c[17]=1.,$
 $c[18]=.3598971722365038560411311053984575835475578406169665809768637532133676092544987146530,$
 $c[19]=.6444833625218914185639229422066549912434325744308231173380035026269702276707530647986,$
 $c[20]=1.,$

$a[2,1]=.3357505083417036184129939488963472892525539577157696170900805997207182929518116563365,$
 $a[3,1]=.1137717040478783056449396184425018992536986324028992632761012508174661576282091865815,$
 $a[3,2]=.4125846513021434764669199036914748441530236624263624906865675605494451389101105748206,$
 $a[4,1]=.197383633256258168291947320800241278775208605609731577360008042625917362018699105258,$
 $a[4,2]=0.,$
 $a[4,3]=.592150899768774504875841962400723836332562581682919473208002412787752086056097315774,$
 $a[5,1]=.1360001717992528326665261557210531883399922632350163155393510462488093550801937826726,$
 $a[5,2]=0.,$
 $a[5,3]=.8247208052028112223790799775745048180379960003630910417779053602715946236310693542837e-1,$
 $a[5,4]=-.3325668379302924720736853353471614924502384232634042555633909737090837529152011167815e-1,$
 $a[6,1]=.6546785199481110579756630335868870724165088583024509548938434492848601278421108871818e-1,$
 $a[6,2]=0.,$
 $a[6,3]=0.,$
 $a[6,4]=.6858715620423033993966826640550281985093888681236135859756994188871385539662876478859e-3,$
 $a[6,5]=.2233808094681792639708262971782213796699231675455239218686431727029937934693022657371,$
 $a[7,1]=.2379439999135994223360182301765245366877534054337310606780367192080205084533052094979,$
 $a[7,2]=0.,$
 $a[7,3]=0.,$
 $a[7,4]=.1285793626493546102687479560301629068933431333159680850577212924587597635005521433930,$
 $a[7,5]=-.7303763776380165799305971651206183012312272113455920027358381669467410091843571268521,$
 $a[7,6]=1.129840917780655787515702699609298438785820557711663244851230684625193199127855317597,$
 $a[8,1]=.6062780896441720418288517632894493561013839292138719356621888281245740094338544165775e-1,$
 $a[8,2]=0.,$
 $a[8,3]=0.,$
 $a[8,4]=0.,$
 $a[8,5]=.7888222248692022386398029561573557081956734138939980123787302990185683517283562747179e-1,$
 $a[8,6]=-.3213213504125939005101626782074483911778772517654658420946839341553511609992151857815e-1,$
 $a[8,7]=.6960045478044110141748620518910045895419574645630705924582272883960758442810235566394e-3,$
 $a[9,1]=.3104415865438721889084097538819995930358479868352200893591644921124828667005686536920e-1,$
 $a[9,2]=0.,$
 $a[9,3]=0.,$
 $a[9,4]=0.,$
 $a[9,5]=0.,$
 $a[9,6]=.1571656120644442171909172634188670081467914525944196307657031602142991040495820182979,$
 $a[9,7]=.1117638541384084302989687338271505642661663918417037071041752801553969715970722155609e-3,$
 $a[9,8]=.1690627071867076073308672954386663460258558459670039606814010070304482468516642450265,$
 $a[10,1]=.143061420142267732943411456202705981582929884075538519224332811759391256045628709601e-1,$

a[10,2]=0.,
a[10,3]=0.,
a[10,4]=0.,
a[10,5]=0.,
a[10,6]=- .3914725335338579386439799990026912235591541327277623987271673700062264924050571982953,
a[10,7]=- .2848400967322984698670378405298733357388045123736554424201702352859211869408079104816,
a[10,8]=- .2559426777170804941167590501634194225203620020234561863154326261989141389268124787652,
a[10,9]=- .7189112790349845437562504807270404806670261637579475044631123583223249124963937790142,
a[11,1]=- .1006668457426631788172270822620227260906121023931371723741841060852730989522549641648e-1,
a[11,2]=0.,
a[11,3]=0.,
a[11,4]=0.,
a[11,5]=0.,
a[11,6]=- .3683271809355001194608455001594963737510628435069995678571139196388186857259494651043,
a[11,7]=- .8575502624022299903546939609254513705068159712672738891650679949767497156363396523266e-1,
a[11,8]=- .263379240448348230467774849110341109669789276529274236259927084605103685123897043694,
a[11,9]=- .6783120744401823352568978305425238981627472606453781308422134412090277276134222894570,
a[11,10]=- .2657008652719721502394642259236950907890441579413439685514223187307272640162219128045e-1,
a[12,1]=- .4212573015701458022875431871453412827491044618882839077863171149554249469159410384126e-1,
a[12,2]=0.,
a[12,3]=0.,
a[12,4]=0.,
a[12,5]=0.,
a[12,6]=- .1140730257394986628323587415013320453327540775054758894945046140858856585220720793160e-1,
a[12,7]=- .3577323583881041642639854910390843838477094752248779125994771974507179107770816673622e-2,
a[12,8]=- .8478085069047181595883795669333443274198965196004767054783136203447118275436721594692e-1,
a[12,9]=- .8236897403845190534516723638464155343698796681468739910260266595384301707513187151823e-4,
a[12,10]=- .7920174936649160445251535005941104644271462692404428580786438040911208546142377592512e-3,
a[12,11]=- .4840734825985701173601980408776943260994401783442431626214940796417131157064341867563e-2,
a[13,1]=- .1866168584194642618748985099397434698267694490527249444362505121514680479505442836574,
a[13,2]=0.,
a[13,3]=0.,
a[13,4]=- .1285793626493546102687479560301629068933431333159680850577212924587597635005521433930,
a[13,5]=- .7303763776380165799305971651206183012312272113455920027358381669467410091843571268521,
a[13,6]=- .3365620746651354218129539461265307620933082614096471567813938850533189571406833598679,
a[13,7]=- .3439152195696137654283681672732838006806635738118480999635325742827372086353048385257,
a[13,8]=- .6116809614283795957124860804122425718138169583157463948158033894717678649195939132136,
a[13,9]=- .8555642651045021202243366091904917631763787495189342130253621820535903092162656518481,
a[13,10]=- .8913928524866960048456401557668818573165120479499861285407465844438950550960191679472e-1,
a[13,11]=- .4263317531098201582091498458499961586420389075833366648914840378325891404712881232497,
a[13,12]=- .4510834231343501965076085217297850477436729165851712257475164429026900343003414799732,
a[14,1]=- .8132722174581177948072809791683141502457873136125978954741528825822682868334020231374e-1,
a[14,2]=0.,
a[14,3]=0.,
a[14,4]=- .6858715620423033993966826640550281985093888681236135859756994188871385539662876478859e-3,
a[14,5]=- .2233808094681792639708262971782213796699231675455239218686431727029937934693022657371,
a[14,6]=- .3543152669595614715438074770044728248424634682417120916726014150358797064660842419218,
a[14,7]=- .1614228337471357340842753214971350545154909424968569413717974406833347832344548170007,
a[14,8]=- .1267989518319081979614362221100086229540210555088918164010191288219362963604567702803,
a[14,9]=- .2482505660965057784745955362600844051763121832196360142449926255422280563592831868088,
a[14,10]=- .1894015072204329862304305088267495664543558350848310970103331708369628629196601961145e-2,
a[14,11]=- .2367108504250404697299275875477514623653536202773466252372015412173547424356865161882e-1,
a[14,12]= .1376373544047006195976245547649688122109906103559164922810806152088122419417100442009,
a[14,13]=- .1650212091015662542191305948002865244010106371945579174943772453918520072439660689694,
a[15,1]=- .1137717040478783056449396184425018992536986324028992632761012508174661576282091865815,
a[15,2]=- .4125846513021434764669199036914748441530236624263624906865675605494451389101105748206,
a[15,3]=0.,
a[15,4]=0.,

a[15,5]=0.,
a[15,6]=- .5266141894222268880524004361760397955773267936583064281992495328485812564705031059898,
a[15,7]=.4270299995350464166415042303891280056028480962227556089080302280248036279775533169729,
a[15,8]=0.,
a[15,9]=0.,
a[15,10]=0.,
a[15,11]=0.,
a[15,12]=0.,
a[15,13]=- .4270299995350464166415042303891280056028480962227556089080302280248036279775533169729,
a[15,14]=- .5266141894222268880524004361760397955773267936583064281992495328485812564705031059898,
a[16,1]=.3357505083417036184129939488963472892525539577157696170900805997207182929518116563365,
a[16,2]=0.,
a[16,3]=- .4368367083891407610190158064846822677554138099678168504498524386288907219928146135373,
a[16,4]=0.,
a[16,5]=0.,
a[16,6]=0.,
a[16,7]=0.,
a[16,8]=0.,
a[16,9]=0.,
a[16,10]=0.,
a[16,11]=0.,
a[16,12]=0.,
a[16,13]=0.,
a[16,14]=0.,
a[16,15]=.4368367083891407610190158064846822677554138099678168504498524386288907219928146135373,
a[17,1]=.3528400914539065757695374250020526983792042094778706633574048575138598395445375459964e-1,
a[17,2]=- .4368588562339554617519938616027395568153523718226810275461527253101515442644071737416,
a[17,3]=- .5185253025751911700815354370658368214653404020923461413204927007907407344767758710502,
a[17,4]=0.,
a[17,5]=0.,
a[17,6]=.8353882146318347708823979907871444293693024897533008980286851134950209556868285481998e-1,
a[17,7]=.3357324883823615793514438806416832609180686549969009829861766772233990660034579152038,
a[17,8]=- .1180346853290197678148440843338719378456952414935754110833043790640005049977678056530,
a[17,9]=- .2028121524999718341813208304021045923675061150408674489110338814798518734278169865166,
a[17,10]=.4018734442526045674154192467995252408036818247069631361197899796078897150680466096292,
a[17,11]=.6982808681238487516481594542254805552510541794271997632640921307356093400075120505480,
a[17,12]=.2745953340127460413630142920026546525788337913278252157685398122819348957290706395825,
a[17,13]=- .8071051158813288531951186779278104056732084407804403857002131168492985419909905100904,
a[17,14]=.2986469883301853807480531774155235135599206769328769914173437804434298240853514778770,
a[17,15]=.5185253025751911700815354370658368214653404020923461413204927007907407344767758710502,
a[17,16]=.4368588562339554617519938616027395568153523718226810275461527253101515442644071737416,
a[18,1]=.2938307949471900509191245805145952233809801203721822254696480231830263682876737357932e-1,
a[18,2]=0.,
a[18,3]=0.,
a[18,4]=.8097585623261748691665599156957419889580677028064596124039075188860010392187779334709e-5,
a[18,5]=- .6843205610945042561647831563935611663624019993417542328392193419101504739210765404635e-2,
a[18,6]=- .8288440674934084120699980604127626680046112912785784205000451133868820398606868044092e-1,
a[18,7]=.4915240768259204899002454562162705998406693082863455330006435458190388104126295949174e-1,
a[18,8]=- .2288787995559432232834353285252066348328126648041925496230731586748285145591788531261,
a[18,9]=.2138347768366427856971059734700329529956406197269990880665442143360292879862745892733,
a[18,10]=- .1163044587346751300226216833711777107650005766876778599912801295783822121898212158499e-1,
a[18,11]=- .6812356607248050759931982501514351831438452997012568521477152142101536632342871756930e-1,
a[18,12]=.4658792344991038821670614221388608934976450989114480576825357407134147542146707426553,
a[18,13]=0.,
a[18,14]=0.,
a[18,15]=0.,
a[18,16]=0.,
a[18,17]=0.,

a[19,1]=.2113378571602374420277136110052052898893390244859103156171695686889879148615095737556,
a[19,2]=0.,
a[19,3]=0.,
a[19,4]=-.1065262813982270421736321056887597644169840405480003349317330779654747321999048188729e-2,
a[19,5]=.1159787569848319533201455539708270911820661904904028479082236372461308290141286281828e-1,
a[19,6]=3.172928818775714913718662698925996566976732063652923713820205128799423604863818787183,
a[19,7]=-1.356152265809547802404511770300923061617248086609860890421095517009766940283141425271,
a[19,8]=-1.421426303181914066590871211273944913785766324626429260355323050564772974854984380587,
a[19,9]=-3.062437381184560680311220839179574511897769154245688774804886043173521679126286689419,
a[19,10]=.3453154009064052590378819199921284923074109984697868286678838075992450089201767938808,
a[19,11]=1.804159324535301465068194764837369904380438458905646872138547945024520033723551249721,
a[19,12]=.9402252984357539631077955338602021135162588157549740312339966303178969239866953409061,
a[19,13]=0.,
a[19,14]=0.,
a[19,15]=0.,
a[19,16]=0.,
a[19,17]=0.,
a[19,18]=0.,
a[20,1]=.1009351730758773354041959979300454884957170390373505052356136269173673722660150501669,
a[20,2]=0.,
a[20,3]=0.,
a[20,4]=-.3235573866902492347373226456848111337125761728092662385568659270479661675175186610264e-3,
a[20,5]=.9872025032407083581419961527286891225503739203946975760654296791583366459813062529561e-3,
a[20,6]=1.367804852689341814189957131623126166400297073015567891194989410231147338805981547452,
a[20,7]=-.8664405258344816407767229544206781292953003744750403406929003955282845762172048865611,
a[20,8]=-1.133544642986956630910134758678810031397407628849098851723503885975539021628670652506,
a[20,9]=-5.145308146584621659402840250171811088408478932754651086084742996132330936257791216823,
a[20,10]=.5046649002539458427855759044072832207534883769337472598377375039915093130036502869308,
a[20,11]=.7492658055673285715162416760965090009616757343578195434094664445814017950166239657386,
a[20,12]=1.116566834277701866180023672019323132605823844466873519053062638188495623431814205982,
a[20,13]=0.,
a[20,14]=0.,
a[20,15]=0.,
a[20,16]=0.,
a[20,17]=0.,
a[20,18]=3.878271696024540735643372931235800053918193177562075837595530894924578184741562298318,
a[20,19]=.4271204084007733062469259764521683079771538929577702908372381950495445363595556137096,

b[1]=.333e-1,
b[2]=-.2192242833052276559865092748735244519392917369308600337268128161888701517706576728499e-1,
b[3]=-.5671077504725897920604914933837429111531190926275992438563327032136105860113421550095e-1,
b[4]=0.,
b[5]=0.,
b[6]=-.5604719764011799410029498525073746312684365781710914454277286135693215339233038348083e-1,
b[7]=.1789297658862876254180602006688963210702341137123745819397993311036789297658862876254,
b[8]=0.,
b[9]=.2774291885177431765083602625606543404285043197180408363394722409866844803871713937960,
b[10]=.1892374781489234901583064041060123262381623469486258303271944256799821862794952728707,
b[11]=.2774291885177431765083602625606543404285043197180408363394722409866844803871713937960,
b[12]=.1892374781489234901583064041060123262381623469486258303271944256799821862794952728707,
b[13]=-.1789297658862876254180602006688963210702341137123745819397993311036789297658862876254,
b[14]=.5604719764011799410029498525073746312684365781710914454277286135693215339233038348083e-1,
b[15]=.5671077504725897920604914933837429111531190926275992438563327032136105860113421550095e-1,
b[16]=.2192242833052276559865092748735244519392917369308600337268128161888701517706576728499e-1,
b[17]=.333e-1,
b[18]=0.,
b[19]=0.,
b[20]=0.,

b*[1]=.3344037852187099466846101649986544327310100728395395602813760467785398930687861767666e-1,
b*[2]=0.,
b*[3]=0.,
b*[4]=0.,
b*[5]=0.,
b*[6]=.6113010998890762963916869653857618652475105906117946545538229101462272927183891506013e-2,
b*[7]=.3707802170945367386885849206273707748006095088736743151044625851723193946074858415044e-3,
b*[8]=-.2650176678445229681978798586572438162544169611307420494699646643109540636042402826855e-2,
b*[9]=.7e-1,
b*[10]=.1890123453067586887502391127597730432674159242843007397123039579423409966367468096432,
b*[11]=.2364066193853427895981087470449172576832151300236406619385342789598108747044917257683,
b*[12]=.1916625876833383403800535414558511660427182036794415571694582176442719766697890871810,
b*[13]=0.,
b*[14]=0.,
b*[15]=0.,
b*[16]=0.,
b*[17]=0.,
b*[18]=.2021833598468461458451290353365137838940142095481651063053356923325198896517261411685,
b*[19]=.4009103957302988028201119686588187384334488174310143305290522776713574498081023228975e-1,
b*[20]=.3337005514527309045537069404928488073145909763371234542738197563254147636380841175187e-1

Version: 28 Nov 2011, Peter Stone