

**A modification of Tom Baker's 21 stage combined order 9 and 10 Runge-Kutta scheme**

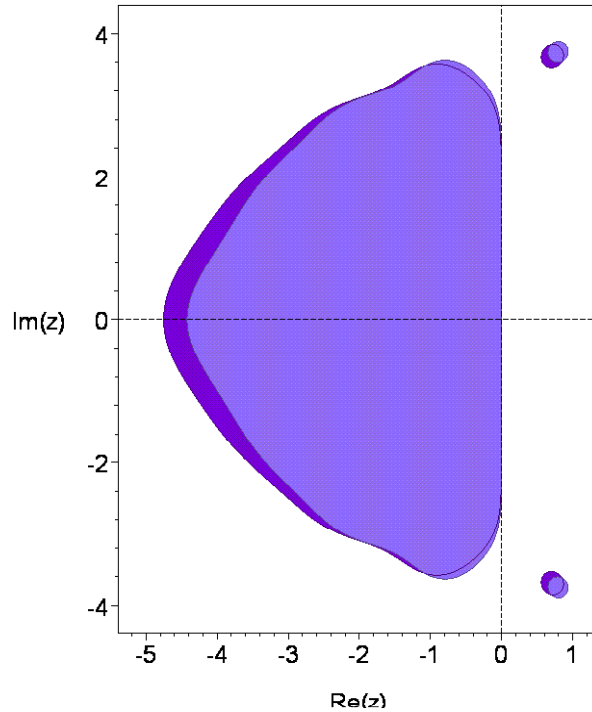
The principal error norm of the order 10 scheme, that is, the 2-norm of the principal error terms is:  $0.2015279316 \times 10^{(-6)}$ .

The principal error norm of the embedded order 9 scheme is:  $0.7453973438 \times 10^{(-6)}$ .

The maximum magnitude of the linking coefficients is 3.609091251.

The 2-norm of the linking coefficients is 6.397788312.

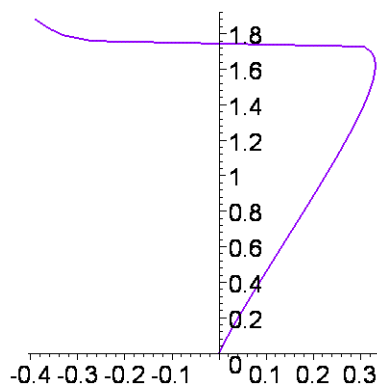
The stability regions for the two schemes are shown in the following picture.



The stability region of the order 9 scheme appears in the darker shade.

The real stability intervals of the order 10 and 9 schemes are respectively  $[-4.4232, 0]$  and  $[-4.7527, 0]$ .

The following picture shows the result of distorting the boundary curve of the stability region of the order 10 scheme horizontally by taking the 11th root of the real part of points along the curve.



The stability region intersects the nonnegative imaginary axis in the interval  $[0, 1.7542]$ .

The coefficients correct to 85 digits are as follows.

$c[2]=.2221256786410917860747299044436491783389867523559152906806903983070815546101310317732,$   
 $c[3]=.3331885179616376791120948566654737675084801285338729360210355974606223319151965476598,$   
 $c[4]=.4997827769424565186681422849982106512627201928008094040315533961909334978727948214897,$   
 $c[5]=.1178543113796560542680332625839563078813281986041546244983306597260752901575905784979,$   
 $c[6]=.6392258346692207061323892455098314619101746724612127712234407514588435902305941834333,$   
 $c[7]=.1821192052980132450331125827814569536423841059602649006622516556291390728476821192053,$   
 $c[8]=.4305144734287562835265186470396689448094038715302391321186029150921233577740230566687,$   
 $c[9]=.7103696300817306000077882382893551203576925792268346477391788477804820702375683910680,$   
 $c[10]=.1879423576772880864712499984295563257200330150919646835425175119169772928557266184370,$   
 $c[11]=.4902023404886283276684079658735771152223007961311221114583570956041699933845837990738,$   
 $c[12]=.6328267839067443514291354538618335288794654911399062166153691947790421183640342606731,$   
 $c[13]=.7415881561238223418573351278600269179004037685060565275908479138627187079407806191117,$   
 $c[14]=.3829059829059829059829059829059829059829059829059829059829059829059829059829059829060,$   
 $c[15]=.1071578066136458769359564671410632063624947676852239430724152365006278777731268313102,$   
 $c[16]=.8756906077348066298342541436464088397790055248618784530386740331491712707182320441989,$   
 $c[17]=.9640718562874251497005988023952095808383233532934131736526946107784431137724550898204,$   
 $c[18]=.2890995260663507109004739336492890995260663507109004739336492890995260663507109004739,$   
 $c[19]=.63109756097560975609756097560975609756097560975609756097560975609756097560975610,$   
 $c[20]=.9738095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095,$   
 $c[21]=1.,$

$a[2,1]=.2221256786410917860747299044436491783389867523559152906806903983070815546101310317732,$   
 $a[3,1]=.8329712949040941977802371416636844187712003213346823400525889936515558297879913691495e-1,$   
 $a[3,2]=.2498913884712282593340711424991053256313600964004047020157766980954667489363974107448,$   
 $a[4,1]=.1249456942356141296670355712495526628156800482002023510078883490477333744681987053724,$   
 $a[4,2]=0.,$   
 $a[4,3]=.3748370827068423890011067137486579884470401446006070530236650471432001234045961161173,$   
 $a[5,1]=.8639187643587187751506715485767099051650176528753656134215400450142730822947915681797e-1,$   
 $a[5,2]=0.,$   
 $a[5,3]=.5270027793214786549195674085935049648250664953581666644103911065267653493053229297588e-1,$   
 $a[5,4]=-.2123784298836368873899063313306517911768021621919860328486245542802855300242087129590e-1,$   
 $a[6,1]=-.2496077415031805344189772590224271365710175103721378993131074554987815441162301300327e-1,$   
 $a[6,2]=0.,$   
 $a[6,3]=0.,$   
 $a[6,4]=.3299769192604014151730962999656171658188440437551729928783649963937409320959667983684,$   
 $a[6,5]=.3342096895591373444011906714464570097484323797432535682763865006149808125462503980681,$   
 $a[7,1]=.4218895726659639302537414960395145704910175104316373585796350624634982821718015816681e-1,$   
 $a[7,2]=0.,$   
 $a[7,3]=0.,$   
 $a[7,4]=0.,$   
 $a[7,5]=.1397531776657774743407521638554197986704275924739074512892624288073787785621340004383,$   
 $a[7,6]=.1770703656393776669862693220856979228547624431937135150257205754104660683679606002069e-3,$   
 $a[8,1]=.1851493930535841299418946394806107768428229638354383360455746223229684644586581872248,$   
 $a[8,2]=0.,$   
 $a[8,3]=0.,$   
 $a[8,4]=0.,$   
 $a[8,5]=-.6253628313528570470093103884276019642808185616271736672167189384575900286920278536740,$   
 $a[8,6]=.1705682208844902983907102977383535879316502817537497315289043691042669052843881544858e-1,$   
 $a[8,7]=.8536710896395801707548633662128247734542344411465994901368567943163182314789539076693,$   
 $a[9,1]=.5855882457240655495518085904977991056722628587972196122762468890147514977255919202993e-1,$   
 $a[9,2]=0.,$   
 $a[9,3]=0.,$   
 $a[9,4]=0.,$   
 $a[9,5]=0.,$   
 $a[9,6]=.1679202279208398545485220582421091096731823162858352191067892181018360563951132612338,$   
 $a[9,7]=.2550303790554367991219840995464154437713440554728051927793849962077100526495088645034,$   
 $a[9,8]=.2288601985330473913821012214510506563459399215884722746253799445694608114203870733008,$

a[10,1]=.6606441117865026679930029474846869476206679387804398623479766633209226455095439192188e-1,  
a[10,2]=0.,  
a[10,3]=0.,  
a[10,4]=0.,  
a[10,5]=0.,  
a[10,6]=.4907267201328102153396904571817296595021030794587769907066604061536986957484901323245e-1,  
a[10,7]=.1529202705209117515147056835844995474246118245600582085028036438730785646763837255238,  
a[10,8]=-.5486476403613564171972849319105143692332664812696720489791898412274058460421414050542e-1,  
a[10,9]=-.2525023199941931165699653243053344549352926316504800536783085478082282134224637173570e-1,  
a[11,1]=.5931053466234180944262894557343610573542941615611757810658899737431828082543912176428e-1,  
a[11,2]=0.,  
a[11,3]=0.,  
a[11,4]=0.,  
a[11,5]=0.,  
a[11,6]=0.,  
a[11,7]=0.,  
a[11,8]=.1640827179582758289675258077796838504540368608888245022082258106012198188613245496941,  
a[11,9]=-.1216526524385458339821491343111094759069789089531715579485367823054728347547132281903e-2,  
a[11,10]=.2680256143923961475980747038635682537919043081757117467230276554516866220453672598974,  
a[12,1]=.5670018993058991106267443063254738706739677495951086352555933935436692396983045925254e-1,  
a[12,2]=0.,  
a[12,3]=0.,  
a[12,4]=0.,  
a[12,5]=0.,  
a[12,6]=0.,  
a[12,7]=0.,  
a[12,8]=0.,  
a[12,9]=.1535536647326738437072269300729814720331340741059409389113078773585049846315716081062e-1,  
a[12,10]=.2830824120059262442516797975230706170896823434730665304162208770349966414709474321683,  
a[12,11]=.2776888154969608117440585326989173775190729652967347287824581906538280544600992084417,  
a[13,1]=.5668706447969628805296301779765272886687606000873023062286468985792379337222618216023e-1,  
a[13,2]=0.,  
a[13,3]=0.,  
a[13,4]=0.,  
a[13,5]=0.,  
a[13,6]=0.,  
a[13,7]=0.,  
a[13,8]=0.,  
a[13,9]=.8951681196604922590182602062126011330810780554426224902437157979917662361157117519698e-1,  
a[13,10]=.2831594562424430984524179716859194149204507902713576023409182268179215111016139628168,  
a[13,11]=.2763580609443640835922945640152295720273282844969585375063174835554568202840594300148,  
a[13,12]=.3586676249126964585783355373996508877764082818474790809637593383223995957130986892290e-1,  
a[14,1]=.5741081736278296640727646782445926626989433106211421341146424381831132096122226976948e-1,  
a[14,2]=0.,  
a[14,3]=0.,  
a[14,4]=0.,  
a[14,5]=0.,  
a[14,6]=0.,  
a[14,7]=0.,  
a[14,8]=0.,  
a[14,9]=-.8524152276065602665136298486642583684671224269557159468252235453623641640305138446150e-1,  
a[14,10]=.2773799489337614134028937672981904730901577608299134228834233445041694883764694262352,  
a[14,11]=.6090604953154606004393678603558908327891872851757987617062733685158979002883081761236e-1,  
a[14,12]=.1705401643125736372297782021884561075611655628547405113358165210401722014732199721992e-1,  
a[14,13]=.5539667340729112905718412639532430943453084890647293706633176016413150287211285653049e-1,



a[18,14]=.7014689656797928323904273010356243402310565437437067950157224965302987952201188576421,  
a[18,15]=.6292834741665538105004321648791335622421032630631057075040573832609705835647142473121,  
a[18,16]=-.9265827793713261290905040194141219820014440849337579006591899499058898809532611540023e-1,  
a[18,17]=.2352137689880466692080739021133212517108693556761324951575716643461456755304949534527e-1,  
a[19,1]=.4324903179685997883027670270041874839605461123050577412739207878558276358679161556488e-1,  
a[19,2]=0.,  
a[19,3]=0.,  
a[19,4]=0.,  
a[19,5]=0.,  
a[19,6]=0.,  
a[19,7]=0.,  
a[19,8]=0.,  
a[19,9]=-.1321880388158680195324659092240059961811356918368873269890367717132644683900120850552,  
a[19,10]=.4747418990980216411438727606243540307071893476754734327598956909458032141762640426103,  
a[19,11]=.4785938071558889713675492223139370706743694402474898872221623331542020753774321429587,  
a[19,12]=-.5353152205760117538450496940765642571166950685058085757804749123374062212034453928427,  
a[19,13]=.6029546962366863788632022688903665970283171833674380786251411794716604521900696927398,  
a[19,14]=.3408591689448711436572809031055725028568384172802096529413167380258553870319367057027,  
a[19,15]=.2089404871785530430842738922833756838087658597766157261501537922004959734346149665563e-2,  
a[19,16]=-.1983329515569084768709487137282214454888734230198612144658084085077379655904977677343,  
a[19,17]=.4826446142862520782211160132698247688403421329751378912965760885348668429496334914164e-1,  
a[19,18]=-.4938186976083408457691109052459173870372110785777420938561373185026259055980923551905,  
a[20,1]=.6006431146380750933491649342981178064940995767737733683407086083346219835571548566958e-1,  
a[20,2]=0.,  
a[20,3]=0.,  
a[20,4]=0.,  
a[20,5]=0.,  
a[20,6]=0.,  
a[20,7]=0.,  
a[20,8]=0.,  
a[20,9]=.2306988101963141382079626518709111609202454010310052968566722386695525917117756720897,  
a[20,10]=.3350522501578381332603484279409125888810233619416222833816255624137261921708142824383,  
a[20,11]=-.1244263514872268025785126198133784985680914081012267608065493462052759188298304947752,  
a[20,12]=.6807703723595219354489997246536058173243244206172334969743132464197564889908251371348,  
a[20,13]=-.4445305998838070921879614772969947455007714478991037331256514353505593229418501421037e-1,  
a[20,14]=.4719794754562491880610451440728957385595069698016170983595174648967326412682279580699,  
a[20,15]=-.1198845901939102122311697247865467039732887281240113498031877757494605257488167184808e-1,  
a[20,16]=.9620713081066634148496496693202506403260733327468232196313267647021165119318394796745e-1,  
a[20,17]=.5391878346117341380193228989195599684957736591734641557001064536593473393964183745828e-1,  
a[20,18]=-.2434534308679502066556002153188128688633966657997206468786180234083149399519459926964,  
a[20,19]=-.5305603087330981104003342196420488253139911949481015244374818805362598444555316234884,  
a[21,1]=.9608812992558035034149445632299113293115693808405116150201122015112803428157533259754e-1,  
a[21,2]=0.,  
a[21,3]=0.,  
a[21,4]=0.,  
a[21,5]=0.,  
a[21,6]=0.,  
a[21,7]=0.,  
a[21,8]=0.,  
a[21,9]=1.810517470252037625281705851031444102735220740124153569843429384170380222568194143397,  
a[21,10]=.9498360065979653890192456622375836274429787587461316960710992671358508971497857738381,  
a[21,11]=-.7578673563930231737000002865985620859552551927996616840873842154856060620148809380863,  
a[21,12]=1.985250552158921862163706499390857491358735361052931000972211026152770816945408624287,  
a[21,13]=.5371611525571120519298292080462600659306090823513700441603761210267841334027951881669,  
a[21,14]=2.491100804296718691334459949830180279575659918272619014793189443014959307560426284683,  
a[21,15]=-.2215266553916399921097045823714486832028558799357842378290662771386126827635033447727,  
a[21,16]=-.8918048806009661523193756236645013322449196487534351576666308826015752858430222316864,  
a[21,17]=.6282543355960432219472270023278563514559612489019935746064390621220298066989499688164,

a[21,18]=-1.811110888421013198197829377133487241558270516598417809528041046791629382915510538833,  
a[21,19]=-3.609091250784601996179148247884150597435772540339186715478529766902301654373027404592,  
a[21,20]=-0.2068074197931346795116105115350231110332482691067644573591033348541781506971908578157,

b[1]=.3067389016116162061089897353998716253082823587895045817554184636872757913671717297352e-1,  
b[2]=0.,  
b[3]=0.,  
b[4]=0.,  
b[5]=0.,  
b[6]=0.,  
b[7]=0.,  
b[8]=0.,  
b[9]=0.,  
b[10]=0.,  
b[11]=0.,  
b[12]=.4907073514067565729939392067667028045423555404163807749646289555155125027784200129583,  
b[13]=-0.3543561098299368788822626195731323823760261204568175650723732912369057054747452214063e-1,  
b[14]=.1718148467524134648945644223832722255850955702671291511263954090699733409482099395889,  
b[15]=.1703140963337104095719876837325314134776080248571171060870758584461097416158124058369,  
b[16]=.2861783688026535910888304989792387184972519078017123929932835271621814214914879136249,  
b[17]=-0.9295186389320980373343059216557523414169378909589833070184425615499802023601790985973,  
b[18]=.1219507114796418151737725129589199310073394337559367471863310042511782632595804934735,  
b[19]=-0.2049071057958368656005975648113636919505101705190761769663806666737354201276036266750,  
b[20]=1.028469363333605957179495117284585304594872388942806504376049074628003456781418439942,  
b[21]=-0.1302472725590148406903586672208082890758004283962918944172451180942801129763891309849,

b\*[1]=.3064705054976696385899551305663642714120732808131362092029164780076609987397028875495e-1,  
b\*[2]=0.,  
b\*[3]=0.,  
b\*[4]=0.,  
b\*[5]=0.,  
b\*[6]=0.,  
b\*[7]=0.,  
b\*[8]=0.,  
b\*[9]=0.,  
b\*[10]=0.,  
b\*[11]=0.,  
b\*[12]=.4994784002947658220035825172228869747201608806055258148596141365573870778911176287487,  
b\*[13]=-0.2766477862565953148967679954332569805571680997630131716356294446566908405331454513729e-1,  
b\*[14]=.1731577037002544404219388681415573860260595710419130017580800343492329627138664857925,  
b\*[15]=.1704487821380529750341070544459364029447976855446009998526045964531287798155707809784,  
b\*[16]=.2687630589370462937686929504638754136343753353824289551735101435044040846289493597565,  
b\*[17]=-0.7674384259279405266727085163105772630737655753956604608845672205640696003550421281264,  
b\*[18]=.1211139843510658183261902590479681451711654597583229022788722974461999501115226584239,  
b\*[19]=-0.2173189674215136773164727811745253511936541913700815240993598402734556836210476721510,  
b\*[20]=.8514809527262379926019050603725447276142233593363235417572559568051000092279212622785,  
b\*[21]=-0.1026677607220765705365541257229771649288530430083855344527388076130245962335141193188.